UNA INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT UTILIZANDO VARIABLE COMPLEJA CON ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO Y NOVENO EN EL CENTRO EDUCATIVO PUERTO CALDAS DE LA CIUDAD DE PEREIRA

JONATHAN ESTRADA SERNA

CC. 1.088.271.123

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PEREIRA, NOVIEMBRE DE 2018

UNA INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT UTILIZANDO VARIABLE COMPLEJA CON ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO Y NOVENO EN EL CENTRO EDUCATIVO PUERTO CALDAS DE LA CIUDAD DE PEREIRA

JONATHAN ESTRADA SERNA

Trabajo de grado para optar el título de

Magister en Enseñanza de la Matemática

Director

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA, PhD

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PEREIRA, NOVIEMBRE DE 2018

Nota de Aceptación

Firma presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Pereira, noviembre de 2018

Dedicatoria

A mi esposa Laura Stefanny y mi a hija canina Lola

Agradecimientos

- ✓ Al Dr. José Rodrigo Granada, por su compromiso y dedicación en la elaboración de este proyecto.

- ✓ Al MSc Ever García, por sus aportes y apoyo incondicional contribuyo a la revisión de este trabajo.

- ✓ Al Centro Educativo Puerto Caldas, docentes y estudiantes, por prestarme el espacio y tiempo para realizar esta propuesta y cambiar la mirada que se tiene de las matemáticas como un área difícil.

- ✓ Al Ministerio de Educación Nacional por brindar la posibilidad a muchos docentes, como es mi caso, de acceder a una de las becas de maestría para la excelencia docente.

RESUMEN

En este documento presentamos una propuesta de enseñanza de las matemáticas para desarrollar el pensamiento matemático desde una perspectiva del análisis de fractales, funciones, sucesiones, e iteraciones con números complejos específicamente, en los *conjuntos de Julia*, para estudiantes de básica secundaria, concretamente octavo y noveno, en el Centro Educativo Puerto Caldas teniendo como marco teórico la *Teoría de las Situaciones Didáctica* de Guy Brousseau y utilizando como metodología la *ingeniería didáctica* mediado por software de geometría dinámica.

En este sentido se busca caracterizar las dificultades de los estudiantes de la institución para abordar ciertas situaciones y confrontarlos con un análisis *a posteriori* de lo observado, elaborar una secuencia didáctica para el aprendizaje de esos saberes en situaciones tales que permitan gestionar de manera controlada el aprendizaje.

Al final, se pretende que con ayuda de la estrategia utilizada los estudiantes generen algunos fractales.

Palabras claves: Fractal, conjunto de Julia, conjunto de Mandelbrot, variable compleja, ingeniería didáctica, y TIC.

ABSTRACT

In this paper we are presenting a mathematics teaching proposal about how to develop a mathematical thinking from a fractal analysis perspective, functions, successions, and iteration with complex numbers specifically, in *Julia sets*, for secondary school students, concretely eighth and ninth graders, in Puerto Caldas Education Center, having as the theoretical framework *The Didactic Situations Theory* and the *Didactic Engineering* methodology assisted by a dynamic geometry software.

In this sense we seek to characterize the students' difficulties when dealing with certain situations and confront them with an *a-posteriori* analysis from what observed, elaborate a didactic sequence for the learning of that knowledge in such situations that allows to arrange learning on a controlled basis.

In the end it is intended that with the help of the strategy used the students generate some fractals.

Keywords: Fractal, Julia set, Mandelbrot set, complex variable, didactic engineering and ICT.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El siguiente proyecto tiene como objetivo presentar a los maestros en formación y en ejercicio una propuesta didáctica acerca de cómo desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes a través del análisis de la geometría fractal, específicamente en los conjuntos de Julia, utilizando los números complejos, en el nivel de básica secundaria.

Se inicia con el estudio y planteamiento del problema, el por qué se realiza este trabajo en el Centro educativo Puerto Caldas, sus antecedentes didácticos y los objetivos, general y específicos que lo sustentan. Luego se realiza un marco teórico amplio acerca del contenido a tratar desde el concepto de número complejo pasando por las operaciones, transformaciones, iteraciones hasta terminar en los *conjuntos de Julia, Mandelbrot* y fractales más generalizados, estos últimos, con una mirada histórica.

En seguida, se desarrolla la metodología de investigación, con un enfoque de investigación mixto, basada en la *Teoría de las Situaciones Didácticas* de Brousseau y estructurada bajo una *ingeniería didáctica* con sus cuatro etapas. Por último, se dan las conclusiones y recomendaciones del proyecto.

Con esta investigación, se pretende que los estudiantes aborden el concepto de fractal, de una forma didáctica a partir de la comprensión geométrica de los números complejos y sus operaciones básicas, a través de situaciones a-didácticas. Además, busca que los alumnos encuentren relaciones de semejanza en los fractales, por medio de los tipos de simetría fundamentales (rotación, homotecia y traslación), conjuntamente podrán ampliar y construir conceptos como dimensión y autosimilaridad que los llevará a institucionalizar sus definiciones.

Por último, es necesario aclarar que el desarrollo de este trabajo sería imposible sin la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC, como herramienta para calcular y graficar los grandes conjuntos de datos que forman los fractales de Julia y Mandelbrot. Al mismo tiempo, se explora con diferentes software interactivos las diferentes tareas con números complejos y fractales a través de las distintas situaciones didácticas planeadas en los anexos.

1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El desarrollo de los pensamientos matemáticos en todas sus formas es uno de los retos más importantes que tienen los docentes actualmente del Centro Educativo Puerto Caldas. Gran parte de las pruebas nacionales en matemáticas, como lo son las Pruebas Saber, históricamente no han tenido los resultados mínimos deseados (Icfes, 2018). Ellos muestran un nivel muy bajo tanto en matemáticas como en lenguaje en los grados 3ro, 5to y 9no, y según los diagnósticos hechos internamente en simulacros, los estudiantes tienen gran dificultad en preguntas con componentes de tipo geométrico (medición, simetría, ubicación espacial).

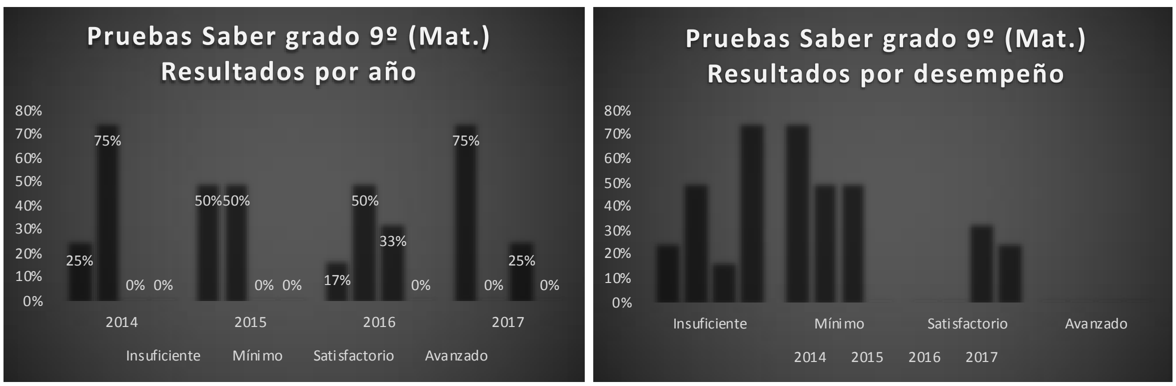


Ilustración 1: *Consolidado Pruebas saber Grado Noveno 2014-2017.*
Fuente: *(Icfes, 2018)*

El asunto se agudiza, cuando se observa que, en el currículo institucional y las prácticas pedagógicas, han estado dedicadas casi exclusivamente a la memorización de procedimientos algorítmicos, enfocadas en desarrollar más el pensamiento numérico y algebraico de los estudiantes, quedando sus habilidades matemáticas desarrolladas de forma casi mecánica en ejercicios con muy poca representación gráfica o geométrica (en algunos casos) que les permitiría descubrir características y modos de visualizar diferente un problema.

Como consecuencia, los estudiantes al presentar las pruebas de estado se enfrentan a preguntas que están muy enfocadas a la interpretación y análisis de modelos, gráficas, tablas, figuras geométricas, patrones numéricos, entre otros, que requieren que el estudiante tenga un pensamiento matemático más amplio, en lo espacial, métrico, aleatorio y variacional. Por tanto, aunque este tipo de problemas sean a veces "sencillos" los estudiantes no tienen las competencias geométricas, algebraicas ni estadísticas suficientes para afrontarlas. Así, cada año las Pruebas Saber siguen reflejando la misma problemática en todos los niveles.

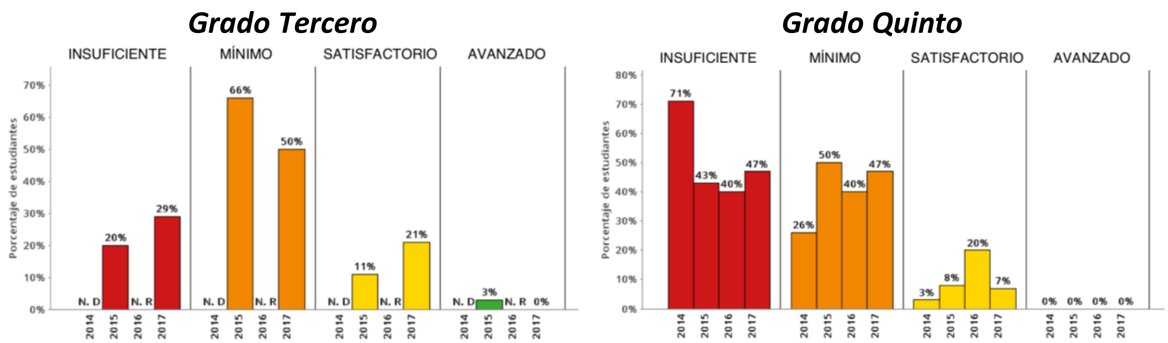


Ilustración 2*: Consolidado Pruebas saber grados Tercero y Quinto.*
Fuente*: (Icfes, 2018)*

Por eso, la enseñanza de la geometría y el álgebra en todos estos niveles debe estar orientada a desarrollar las competencias matemáticas del estudiante; teniendo en cuenta los componentes más trascendentales para su desarrollo cognitivo, y pasar de enseñar una asignaturas donde se imparten axiomas, definiciones y teoremas dirigidos a la memorización de reglas y algoritmos sin contexto, a dar un paso al frente y tomar una perspectiva más amplia en la que se consideren diversos contextos, donde el pensamiento numérico, no esté aislado de los demás pensamientos sino que los complemente y poder hacer aportes importantes a procesos como el razonamiento lógico, mediante las competencias como la modelización, la comunicación y la resolución de problemas.

De esta manera, se considera que una posible forma de enfrentar este problema es tomar un objeto matemático transversal a los pensamientos tal como los fractales en la *variable compleja*; específicamente *los conjuntos de Julia y Mandelbrot*, y desarrollar todo una estructura metodológica que incorpore algunos elementos de los diferentes pensamientos matemáticos: funciones, sucesiones, series, números complejos, simetrías, similaridad, dimensión, criterios de convergencia, entre otros, y demostrar así que es posible, por ejemplo, el aprendizaje de la geometría a través del algebra, y el algebra a través de la geometría, sin necesidad de estar desconectadas como asignaturas aisladas o, como muchos docentes hacen, dejar las temáticas de la geometría al final del curso “por si alcanza el tiempo”.

Así pues, la pregunta de investigación sería ¿Cómo aportar una propuesta didáctica pedagógica adecuada que contribuya al desarrollo del pensamiento geométrico y variacional a través del estudio de los fractales, específicamente los Conjuntos de Julia y Mandelbrot, y el estudio de algunos tópicos de la variable compleja (números complejos, operaciones, transformaciones, iteraciones y mapeo) en estudiantes de los grados 8º y 9º del Centro Educativo Puerto Caldas, del municipio de Pereira?

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo General

Elaborar una propuesta didáctica pedagógica que contribuya al desarrollo del pensamiento matemático analizando algunos *Conjuntos de Julia* y *Mandelbrot, y* utilizando conceptos básicos de la *variable compleja* con estudiantes de los grados 8º y 9º del Centro Educativo Puerto Caldas.

2.2. Objetivos específicos

- ✓ Identificar algunas problemáticas que se presentan en el aprendizaje de la geometría en los estudiantes de octavo y noveno grado del Centro Educativo Puerto Caldas.
- ✓ Diseñar una estrategia de aprendizaje para introducir el concepto de números complejos y sus operaciones básicas a través de su representación geométrica y algebraica.
- ✓ Desarrollar el concepto de *transformación lineal* de "números laterales" por medio de las operaciones básicas con el uso de las TIC.
- ✓ Clasificar los diversos criterios de convergencia por medio de *iteraciones* de "números laterales" bajo la transformación cuadrática.
- ✓ Generar y clasificar, con asistencia de software educativo, nuevos *conjuntos de Julia.*
- ✓ Construir *un conjunto de Mandelbrot utilizando la* propiedades de similaridad.
- ✓ Calcular la *dimensión fractal* de los *conjuntos de Julia y Mandelbrot* usando el *método de cajas (Box-Counting)*.
- ✓ Diseñar y analizar nuevas figuras fractales, generadas por los estudiantes, usando otras transformaciones, reconociendo sus propiedades de autosimilaridad y dimensión.

3. JUSTIFIACIÓN

El presente trabajo está formulado con el objetivo que los estudiantes del Centro Educativo Puerto Caldas desarrollen un pensamiento matemático más amplio a través de la construcción y análisis de otro tipo de sistema geométrico, el cual no ha sido abordado en la escuela, este es, la geometría fractal. Por medio del cual, se da el estudio y la aplicación de los números complejos y sus operaciones en el plano para construir los llamados *conjuntos de Julia* y *conjunto de Mandelbrot*. Así, los estudiantes descubren por sí mismos, las distintas propiedades geométricas que tienen los fractales tales como simetrías, autosimilitud, semejanza y dimensión no entera; extrapoladas a su vez en los objetos naturales de su entorno, permitiéndoles una mejor comprensión del mundo que los rodea.

En este sentido, esta propuesta es llevada a cabo utilizando como medio las TIC, disponibles en la institución, a través de ordenadores con software interactivo como Excel y GeoGebra, que permiten construir y dar paso al desarrollo de algoritmos con números complejos por medio de hojas de cálculo, dando también una visualización dinámica de los resultados en uno o varios planos cartesianos, de este modo se fortalece el desarrollo del pensamiento lógico matemático de los estudiantes.

En cuanto a la programación, el "testear" uno o más números complejos de la forma $x + iy$ en hojas de cálculo, es más sencilla si, estos números se manipulan como pares ordenados (x, y) (García, 2018), de forma que cada una de sus componentes se organicen en columnas diferentes, y sus operaciones tales como la suma y la multiplicación, se realicen a través de funciones sintácticas propias del programa o creadas por el estudiante. En consecuencia, el resto de las operaciones como son las transformaciones y las iteraciones se van ordenando por filas o columnas según convenga en la función. Por esto, y todo lo demás, poco a poco el estudiante, va asumiendo la programación de estos números como artilugios significativos en la construcción lógica de todo un andamiaje algorítmico suficiente para la visualización de los fractales no solo de Julia y Mandelbrot sino también de algunos otros creados por él mismo.

De esta manera, los Lineamientos Curriculares (MEN, Lineamientos Curriculares de Matemáticas, 1998) y los Estándares Básicos de Matemáticas (MEN, 2002) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional apoyan los mismos procesos generales que se plantean en este trabajo, haciendo énfasis en que el docente de matemáticas debe tener en cuenta las diversas competencias a saber: *Formular y resolver problemas*; *Modelar procesos y fenómenos de la realidad*; *Comunicar*; *Razonar, y formular*; *Comparar y ejercitar procedimientos* como también los algoritmos (MEN, 2002). Todos ellos, implícitos en la formación de los cinco tipos de pensamiento: Numérico, Espacial, Métrico, Variacional y Estadístico, en este caso, para el estudio y comprensión de la geometría fractal.

Por esta razón, el resultado de esta investigación pretende el fortalecimiento de al menos cuatro de estos pensamientos: Numérico, Métrico, Geométrico y Variacional, ya que el estudio de los fractales a través de la variable compleja permite que estos pensamientos se conecten al mismo tiempo, avanzando de forma eficiente en un proceso conjugado de aprendizaje individual y colaborativo con ayuda de las TIC.

En cuanto a los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas, en su segunda versión, propuestos también por el ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016), se encuentran varios aspectos que conectan con algunos elementos de esta investigación, por ejemplo, en grado octavo, el punto seis dice "identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto" y el punto siete habla de "Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica a situaciones reales". Por otro lado, en grado noveno, dicen "Encuentra las relaciones y propiedades que determinan la formación de secuencias numéricas" y "explico criterios de semejanza y congruencia a partir de teoremas", entre otros criterios. Para este caso, es necesario centrar la atención en los referidos a la población a aplicar.

Este trabajo hace parte del macroproyecto "*Estudio de la Variable Compleja*" de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira dirigido por profesor José Rodrigo Granada el cual tiene como fin, desvanecer el concepto apático que en general se tiene de la enseñanza de la matemática de la variable compleja a nivel de Educación Básica Segundaria y mostrar otra mirada a los estudiantes y docentes en el sentido que de "compleja" solo se tienen el nombre, ya que como anterior y posteriormente se explica, los números, las operaciones y la visualización gráfica en el plano de estos se pueden desarrollar de una manera muy familiar. Por ello, es necesario sustituir el término **Número Complejo** por "**Número Lateral**" (NL), como una forma de no confundir a quienes por primera vez se enfrentan a estudiar los conceptos básicos de la variable compleja (García, 2018).

Por todo esto, esta investigación buscará construir una propuesta didáctica flexible, que permita dar otra mirada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de otro tipo de geometría, observar sus distintas propiedades, abordar los números complejos en un sentido más amigable "lateral", y permitir la exploración libre de los objetos matemáticos por parte de aquellos que deseen ahondar en este cautivante mundo de los fractales.

4. ESTADO DEL ARTE

En el mundo nadie pone en duda el papel que cumplen las contribuciones matemáticas al avance de la sociedad ya que su conocimiento ha permitido no solo el desarrollo de la cultura y la sociedad, desde la antigüedad, sino también, el desarrollo de la ciencia y la tecnología desde la edad moderna (MEN, 2002, pág. 46). Es por esto que, las matemáticas se han convertido en un pilar en el desarrollo de las sociedades y uno de los fines principales de la educación.

Es un hecho que, en Colombia, se viene investigando y debatiendo el papel que ha tomado las matemáticas en el currículo. Así, el Ministerio de Educación, siguiendo estos objetivos publica en 1998 unos lineamientos y estándares curriculares (2002) en matemáticas donde clasifican por competencias los conocimientos matemáticos en cinco tipos, diferentes pero relacionados, de pensamientos: pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional, los cuales individualmente tienen sus diferentes sistemas matemáticos que lo sustentan y su finalidad es desarrollar no sólo el pensamiento lógico sino fortalecer también los cinco procesos generales de pensamiento: "(1) Formular y resolver problemas; (2) Modelar procesos y fenómenos de la realidad; (3) Comunicar; (4) Razonar, y formular, comparar y (5) Ejercitar procedimientos y algoritmos".

Estos pensamientos, no solo enfrentan a las ramas más tradicionales de las matemáticas: la *aritmética*, y la *geometría*, sino también a los sistemas más modernos de la misma, la *métrica* con la topológicas, la *estadística* y la *probabilísticas*, el *álgebra*, el *cálculo diferencial e integral*. Todos ellos surgiendo en la historia, como sistemas matemáticos relacionados, permitiendo subdividir el pensamiento matemático en los cinco ya antes mencionados. (MEN, 2006, pág. 57)

En cuanto al pensamiento espacial, con todos sus sistemas geométricos, que sin duda han contribuido a desarrollar la ciencia sobre la modelación de los patrones de la naturaleza para el estudio de conceptos geométricos a que apuntan, en gran medida, los fines de la educación. En Colombia, la enseñanza de la geometría en las escuelas estuvo relegada a un segundo plano, desde principios del siglo XX con la escuela de Burbaki, únicamente dispuesta en conceptos euclidianos donde axiomas, teoremas y propiedades en figuras regulares eran aprendidos por los estudiantes de forma mecánica, sin contexto y casi siempre trabajados, finalizando el año escolar, prácticamente no siendo incluida en la mayoría de los planes de estudio de las instituciones educativas regulares (MEN, 1998, pág. 56). Esto trajo consecuencias en las pruebas de estado y se cuestionó realmente el sentido de la enseñanza de la geometría, por lo que muchos aspectos de la naturaleza no podían ser explicados con facilidad (Zapata, 2014) lo que provocó que se diera en el país en la segunda mitad del siglo, la famosa propuesta *Renovación Curricular*, donde la geometría rescatada y tenida en cuenta como una "herramientas de exploración y representación del espacio" importantísimo para la enseñanza, y abriendo espacios donde los demás sistemas geométricos, como la geometría fractal, comenzaron a ser tenidos en cuenta.

Sin embargo, tocando esto último, la enseñanza de la geometría fractal es considerada a la fecha como un nuevo concepto para la enseñanza de las matemáticas en los niveles de básica primaria y segundaria, distinto de la clásica euclidiana, ya que ésta estudia objetos altamente irregulares de diferente naturaleza, pero es justificada en la educación por la necesidad del uso de los conocimientos matemáticos para explicar el entorno y desarrollar "modos alternativos de razonamiento basados en argumentos visuales y cualitativos" (Pérez Medina, 2007, pág. 13) a la hora de estudiar las formas de la naturaleza que no se explican con un pensamiento euclidiano.

Por esto, en Colombia la enseñanza de la geometría fractal y otras geometrías esta apenas en sus inicios (Pérez, 2005, pág. 12). Quizás debido a que el estudio los fractales como objeto matemático no tiene más de 50 años. A nivel nacional, apenas a partir de los años noventa se da espacio a su estudio en el campo escolar, primero, en la educación universitaria y más tarde, se despliega en todo el país grupos de investigación enfocados en su didáctica en niveles más elementales del sistema educativo.

Así, instituciones de educación superior como la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia de Santander, la Universidad de Pamplona y la Universidad Tecnológica de Pereira crean grupos de investigación y cursos en pregrado y posgrados, orientados a diseñar, dirigir e implementar propuestas relacionadas con geometrías fractales intentando que se integren en los contenidos curriculares de matemáticas tanto en la enseñanza básica segundaria y media como en la básica primaria, en las instituciones educativas del país.

Monografías importantes como "*Geometría fractal en bachillerato*" (Castro, 1994), "*Geometría fractal en el bachillerato, acercamientos por sistema dinámicos*" (Daza, 1999), "*Introducción a la geometría fractal, básica primaria*" (Cobos, 2002) y proyectos de grado laureadas de maestría como la del profesor William Estrada, de la Universidad de Pamplona titulada "*Geometría fractal en el bachillerato"* que dio lugar al libro *"Geometría fractal, conceptos y procedimientos para la construcción de fractales*" (Estrada, 2004), entre otros, han venido desarrollando toda una gran propuesta pedagógica para la enseñanza de una geometría distinta, como herramienta pedagógica llamativa y complementaria tanto para el estudiante como para el docente.

En la Universidad Tecnológica de Pereira, se han dado varios proyectos de grado importantes sobre la enseñanza de fractales, tal es el caso de la magister Luz Adriana Cardona Grisales, con su trabajo "*Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para el desarrollo geométrico en estudiantes de la media básica de C. E. Bachillerato en Bienestar Rural, sede Ciato, en el municipio de Pueblo Rico, mediante elementos de la naturaleza*" (2017) donde propone una didáctica interesante con material concreto desarrollada con estudiantes de grado décimo y aborda conceptos básicos de fractales, y el magister José Alirio Márquez Vera, en su trabajo "*Enseñanza de la dimensión fractal usando el principio de auto semejanza con GeoGebra a estudiantes de la básica media en la I. E. Nuestra Señora de Guadalupe de Dosquebradas Rda.*" (2017) donde se propuso una estrategia acerca de calcular la dimensión de los fractales a través del métodos de semejanza por medio del software GeoGebra.

Así mismo, también se encuentran artículos como "*Geometría Fractal y transformada de Fourier*" (Rivera Henao, 2011) donde los autores muestran una estrecha relación entre la geometría fractal, la transformada de Fourier y las leyes de potencia, además de definir con ejemplos simples el concepto de dimensión fractal.

A nivel internacional se cita el trabajo "*Fractal dimensión and Julia sets*" (DeLorto, 2013) de la Eastern Washington University donde se explica con detalle los sistemas de funciones iteradas, dimensión fractal y la teoría del caos; y el texto "*Caos , Orden y Desorden en el sistema monetario y financiero internacional*" (2002) del doctor José Jesús Borjón Nieto, quien analiza los mercados financieros internacionales y muestra que éstos no se rigen por el orden sino por el caos relacionando estos con conceptos de la geometría fractal.

En el propio Centro Educativo Puerto Caldas se encuentra un único texto escolar que habla acera de los fractales, "*Misión Matemática 11*" (Vergara Saavedra, 2009) éste se encuentra dirigido para estudiantes de grado 11 (con los cuales no cuenta la institución, ya que solo hay grupos hasta noveno grado). En el texto explica de manera muy corta, a través de las sucesiones y series, la ciencia de la naturaleza y sus implicaciones matemáticas. Así, analiza los casos de patrones implícitos en las plantas, los caracoles, y la reproducción de los conejos abordando las similitudes del triángulo de Sierpinski, las espirales, y otras figuras fractales para llegar al concepto de límite.

Los elementos mencionados anteriormente, nos sirven de argumento para proponer y generar estrategias didácticas y pedagógicas que hagan del tema de la construcción de fractales un atractivo de interés para los estudiantes, haciendo uso de herramientas tecnológicas.

5. MARCO TEÓRICO

En los Lineamientos y Estándares de Matemáticas se define que, el proceso de construcción de los pensamientos geométricos y métricos en la escuela es fundamental para desarrollar el pensamiento lógico y matemático en los educandos; en un primer lugar, por las relaciones en el reconocimiento y ubicación de su cuerpo en el espacio con los objetos que los rodean (MEN, 2006, págs. 61,62), en segundo lugar, para construir relaciones de medida con estos objetos (conocimientos métricos), y en tercer lugar, para que estos conocimientos se conviertan en leyes cada vez más complejas y formales (axiomas y teoremas).

En su teoría de las inteligencias múltiples Howard Gardner considera el pensamiento espacial como una de estas inteligencias y "plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas". (MEN, 1998, pág. 56). Por esto, la manipulación de objetos bidimensionales o tridimensionales permite que el estudiante adquiera herramientas mentales para modelar explorando y representando el espacio físico ya sea por medio de dibujos, movimientos de su cuerpo o diagramas simbólicos.

Complementando lo anterior, tal vez, distintos programas de computación le permitan al estudiante realizar mejor sus representaciones mentales, construir relaciones topológicas con elementos, operaciones y transformaciones de las figuras que observa y mide, y las articule en un sistema notacional y simbólico para la realización y exploración de procesos cognitivos como razonamientos, clasificación y uso de estos.

Estos sistemas se refinan más y más con ayuda colaborativa de otros pensamientos y el lenguaje técnico que lo estructura, los cuales se precisan en modelos lógicos matemáticos del espacio cada vez más rigurosos, por ejemplo, sistemas como la geometría euclidiana o fractal que se consideran obras de una práctica social del uso de otros pensamientos lógicos y matemáticos donde los demás procesos han acompañado su formalización y estructura todos ellos en ambientes colectivos y acompañados por un gran número de personas que los solidificaron.

Por tanto, el pensamiento espacial al igual que los demás pensamientos no son un conjunto de procesos ni de sistemas aislados, incluso está influenciado por características del entorno físico, social, cultural e histórico de cada individuo. Por eso, el Ministerio propone en sus lineamientos un enfoque activo de la enseñanza de la geometría, que parte desde "el hacer" del alumno en diversos ambientes matemáticos de aprendizaje, hasta que los conceptos estén suficientemente construidos como para que ellos puedan por si mismos evaluarlos creando posibles definiciones y simbolismos formales (Pág. 57).

5.1. Las Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

Desde una perspectiva didáctica, desde la *Reforma Curricular* en Colombia se viene trabajando con diferentes tipos de marcos teóricos para abordar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, comenzando desde un modelo conductista del aprendizaje hasta las teorías del desarrollo cognitivo y social de Piaget y Vygotsky. Pero, desde hace unos pocos años, ha aparecido en el país la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD), heredada de la didáctica francesa, representada por Guy Brousseau, su principal exponente, como necesidad de identificar los elementos de la didáctica de la Matemática y teorizar sobre ellos. Esta perspectiva didáctica, contempla unas ideas muy revolucionarias relacionadas con las concepciones del *saber didáctico* y la *transposición didáctica*.

Brousseau, en su teoría, considera la didáctica de la matemática como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación del saber por el sujeto (Brousseau, 1997) con apoyo de los saberes previos. En términos de los lineamientos curriculares de matemáticas la TSD "permite definir en cada instante los objetos que se estudian con ayuda de las nociones introducidas precedentemente y, así, organizar la adquisición de nuevos conocimientos con el auxilio de adquisiciones anteriores" Los TSD "prometen pues al estudiante y a su profesor un medio para ordenar su actividad y acumular en un mínimo de tiempo un máximo de "conocimiento" bastante cercano al "conocimiento erudito". Evidentemente, debe estar complementada con ejemplos y problemas cuya solución exige poner en acción esos conocimientos" (pág. 26-27).

En este sentido a la *teoría de situaciones didáctica* se le considera, según Rodríguez (2017, pág. 40) "como parte de una concepción constructivista o piagetiana del aprendizaje", donde el docente debe brindar situaciones matemáticas reales y el alumno por su parte tenga la necesidad de generar conocimientos y saque nuevas producciones matemáticas por sí mismo, algo como lo que realiza un investigador matemático.

Complementando lo anterior, en este caso, el papel del docente es inverso al del investigador, debe de *re-contextualizar* y *re-personalizar* los conocimientos, "cada conocimiento debe nacer de la adaptación a una situación específica" los alumno deben a su vez "re-descontextualizar su saber con el fin de identificar su producción con el saber que se utiliza en la comunidad científica" (MEN, 1998, pág. 28), es decir, un ambiente de *simulación*, como una *sociedad científica*, lo que Brousseau llama una ***Situación a-didáctica.***

Con la finalidad de que estos alumnos se apropien y construyan esos conocimiento, el docente idea para la clase, la ***Situación didáctica*** que se establece entre: un conjunto de alumnos, un contexto y un medio (materiales o instrumentos) con la finalidad de que cada estudiante aprenda a solucionar cada situación en particular y pueda afrontar otros problemas sin ayuda del maestro. (Romero V., 2018)

Dentro de esta relación *Maestro-Alumno-Medio*, se establece implícita o explícitamente un ***Contrato didáctico***, que consiste, en las relaciones o “reglas” entre maestro y alumno, algo así como, lo que espera el docente que haga el alumno y viceversa, donde se pretende, en esencia, modelar el proceso de enseñanza-aprendizaje como una especie de “juego didáctico”, para lo cual se pueda llevar a cabo la *transposición didáctica* de los conocimientos.

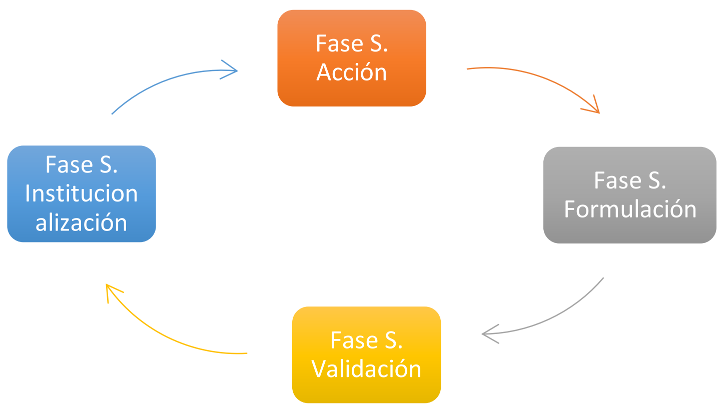


Ilustración 3: *Fases teóricas de la ingeniería didáctica.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Para esto, surgen algunas ***fases teóricas*** de situaciones didácticas. Según Brousseau debería cada una de ellas, desembocar en situaciones *a-didácticas*.

La primera, *Fase Situación **Acción**,* alude, básicamente a que el estudiante, interactuando con su medio (puesto por el docente), trabaje individualmente en un problema y con sus propios saberes y conocimientos previos desarrolle un nuevo saber determinado.

La segunda fase, *Situación de **Formulación***, consiste en que en ciertas situaciones el estudiante busque, por necesidad, a los demás para el intercambio de hipótesis o conjeturas acerca de cómo solucionar el problema.

En la tercera fase, *Situación de **Validación***, trata sobre, una vez los estudiantes de forma grupal o individual han interactuado con el medio didáctico y hecho sus conclusiones para resolver el problema, estas deben ponerse en consideración de los otros grupos para ser evaluarlas y “sancionadas” si es el caso, siendo capaces de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas o modificar ciertas consideraciones.

Por último, la *fase Situación de **Institucionalización***, que representa la actividad del cierre de la situación didáctica, donde ya el docente toma el conocimiento construido por sus estudiantes, lo presenta en un orden adecuado, clarificando conceptos, sacando conclusiones y lo formaliza, vinculando todo lo que se produjo, sacando nuevos conceptos a estudiar y repetir nuevamente el ciclo.

5.2. La Ingeniería Didáctica

Del avance en teoría didáctica y su consolidación como campo disciplinar, en los años 80 nace en Francia la metodología de investigación denominada *ingeniería didáctica* (ID). Derivada de *la Teoría de las Situaciones Didácticas* de Brousseau, la *ingeniería didáctica* sale de la necesidad de dar una función y guiar a la experimentación en clase, con el fin de que su producto sea significativo para la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes; y permita una reflexión didáctica no solo para la enseñanza de las matemáticas, ya que sus fundamentos permiten ser aplicados en las demás áreas. (Calderón, 2005)

En general la *ingeniería didáctica*, se utiliza con una doble función: como metodología de investigación y como método de producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje. La primera, busca caracterizar *a priori* una situación y confrontarla con un análisis *a posteriori* de la realidad observada. La segunda, es más estandarizada, ya que cumple con todos los requisitos de una ingeniería, es decir, es eficaz y se adapta a diversos contextos. En resumen, la *ingeniería didáctica* busca brindar herramientas efectivas al docente para producir conocimiento. En palabras de Douady

> *…el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase*. (Douady, 1995, pág. 241)

Según Artigue (Douady, 1995) el proceso de investigación en la ingeniería didáctica distingue cuatro fases:

Primera Fase: *Análisis Preliminar*: En esta etapa se trata de buscar y analizar los conceptos y concepciones de los estudiantes; las dificultades que determinan su evolución; los obstáculos epistemológicos y sus efectos en el proceso de enseñanza-aprendizaje en relación con el objeto matemático; el análisis del campo donde se va a situar la acción didáctica teniendo en cuenta los objetivos de la investigación

Los análisis se realizan bajo la dimensión didáctica, cognitiva y epistemológica.

- La **dimensión didáctica** tocando todo aquello que tenga que ver con el proceso enseñanza aprendizaje del contenido matemático.
- La **dimensión cognitiva,** teniendo presente los niveles de aprendizaje desarrollados por el contexto y las concepciones *a priori* de la población a investigar antes de que el sujeto sea sometido al aprendizaje oficial.
- Y la **dimensión epistemológica**, ya que toma en cuenta la evolución histórica de los conceptos matemáticos, y los aspectos teóricos del objeto matemático en estudio.

Segunda fase: *Concepción y análisis a priori de las situaciones didáctica*: En esta etapa el investigador identificar las variables macro y micro didácticas relacionadas con la organización de las secuencias de clase, diseña situaciones o actividades que ayuden a analizar los conocimientos que los estudiantes ya tienen, basados en estudios previos; analizar como la manipulación de estas variables permiten controlar los comportamientos de los alumnos antes de la experimentación; se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje. En resumen, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- Los resultados que se esperan de los estudiantes
- Planificar las intervenciones del docente
- Identificar las variables de estudio
- Prever y analizar las dificultades que los alumnos podrían enfrentar.

Tercera fase: *Experimentación*: En esta etapa se ejecuta lo planeado en la fase *a priori*, esta supone:

- La explicación de los objetivos.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos.
- Las observaciones registradas.

Cuarta fase: *Análisis a posteriori y evaluación*: Se fundamenta en el *análisis de contenido o de tareas* (Orozco, 2000), análisis *a posteriori*, de los datos recogidos en la experimentación para la posterior validación o refutación de las hipótesis formuladas en el análisis *a priori*. Esta fase supone:

- Recolección de datos de la experimentación y externos
- Análisis de contenido o de tareas.
- Validación o refutación de hipótesis formuladas

> *La noción de tarea que se construye desde este modelo de investigación se constituye como un sistema propuesto para el desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes, que se articula en los niveles macro (curricular y didáctico) y micro (de la interacción con el conocimiento y con los interlocutores del aula), niveles que se han de tener en cuenta en los respectivos análisis.* (Calderon, 2005, pág. 212)

5.3. Uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas

El uso de herramientas o tecnologías para la información y la comunicación TIC en la enseñanza de las matemáticas en Colombia ha constituido un factor poderoso para la integración curricular y el manejo de principios y valores inherentes a la tecnología (MEN, 1999, pág. 15), además que ha constituido un papel esencial en el desarrollo económico, científico y tecnológico del país desde la *llegada del nuevo milenio* y el *nuevo orden mundial.* (Pág. 17-18)

En este contexto, actualmente la tecnología ha hecho que la realidad se perciba de múltiples formas, para la fecha que se escribe este texto, se cuenta con 93.6% de las instituciones en Pereira con acceso a internet sobre el promedio nacional que es del 53% (MEN, 2018); las tabletas, los computadores o sobre todo teléfonos inteligentes están a la orden del día cuando se trata de los *gadgets* con que cuenta los estudiantes, proporcionando una comunicación más sofisticada y permitiéndoles acceder a cualquier tipo de información de manera inmediata. Mientras tanto, lamentablemente la escuela sigue transmitiendo los conocimientos de la misma forma desde hace varias décadas como bien dice Rodríguez (2017, pág. 37).

La adaptación del entorno educativo a las nuevas tecnologías y el uso adecuado que se le dé a estas es un desafío; de nada sirve tener los elementos, sino se utilizan de manera productiva a las necesidades de cada situación de aprendizaje. Las TIC han de vislumbrar nuevos métodos de enseñanza aprendizaje. La innovación tecnológica muestra al mundo un nuevo horizonte de conocimientos y un sinnúmero de ventanas al futuro que llevan al perfeccionamiento de las estrategias y de los medios necesarios, que van de la mano de un acompañamiento adecuado, para llevar a cabo un aprendizaje significativo y satisfactorio. (MEN, 1999, pág. 34).

El sistema ha comenzado a evolucionar, y la educación de los jóvenes ya no es la misma de antes. Según los Lineamientos, para la enseñanza de las matemáticas, la forma de presentación clásica de los conocimientos (presentación axiomática), "no solo oculta los saberes científicos, sino que cuando es utilizada para presentar los saberes matemáticos escolares, da al profesor la ilusión de tener todo bajo control y oculta la actividad matemática del alumno" (1999, pág. 23).

Según estos Lineamientos, el impacto del uso de la tecnología en la educación matemática ha tenido dos instancias importantes: en el conocimiento matemático propiamente dicho y en el currículo.

En primera instancia, la tecnología "se convierte en un nuevo ambiente para trabajar representaciones formales de objetos y relaciones matemáticas" es decir, los recursos tecnológicos permiten una amplia y directa experiencia matemática para la ejecución y representación de acciones cognitivas. Según Luis Moreno (1998), las TIC nos han cambiado el campo de la experiencia posible, por ejemplo, la representación gráfica de una ecuación en la pantalla de un ordenador o calculadora permite ver de otra manera la simbolización matemática. De este modo, se modifica el nivel de realidad del concepto matemático, porque se asocia a un campo de experiencia diferente que antes no se tenia (MEN, pág. 29). Estos cambios cognitivos tienen que ver con tres características particulares de estos recursos según este texto:

- La facilidad de tener a la mano diversas representaciones de un mismo concepto matemático y poder relacionarlas activamente unas con otras.
- La manipulación de objetos matemáticos y sus relaciones.
- El poder conectar experiencias reales con formalismos matemáticos usando una combinación de toma de datos reales y simulaciones.

En segunda instancia, el papel de las TIC en la enseñanza de las matemáticas ha "iluminado" el currículo a través del *sistema didáctico*. Según estos lineamientos, las TIC influencian al currículo en sus tres ejes: el *contexto*, los *procesos de aprendizaje* y los *conocimientos básicos*.

En el ***contexto***, la tecnología ha proporcionado que las matemáticas se introduzcan en muchos ámbitos de la sociedad, en áreas como los negocios, la biología, la medicina, la sociología y la lingüística la tecnología ha hecho que estas hagan grandes aportes en el análisis lógico de gran cantidad de datos y desarrollos importantes en cada una de ellas dando origen a nuevas disciplinas. Así mismo, las TIC han penetrado en la visión del aprendizaje de las matemáticas, proporcionando ambientes de trabajo de aula en el que se valora más la exploración, el descubrimiento, y la creación de patrones por medio de programación o ejecución de software, algo así como un *laboratorio de aprendizaje* donde se ejecutan, validan hipótesis, controlan variables, etc.

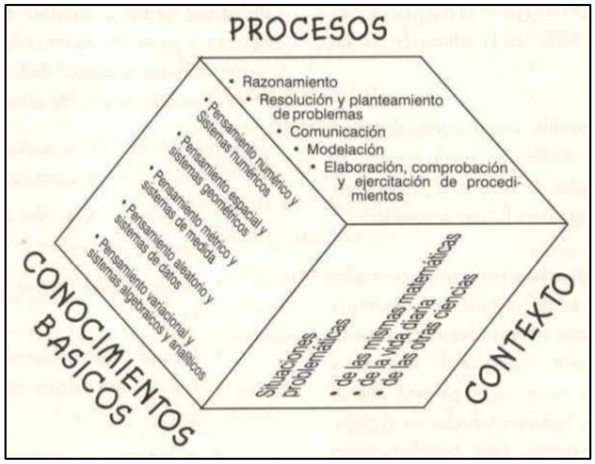


Ilustración 4: *El currículo.*
Fuente: *Lineamientos Mat. Pág. 12.*

Así también, Las TIC han proporcionado habilidades cognitivas para desarrollar los ***procesos de aprendizajes*** en el sentido de favorecer destrezas a través de procesos (MEN, 1999, págs. 36-39) como:

- La *visualización*, como la capacidad del estudiante para visualizar y manipular de manera activa imágenes conceptuales y transformar representaciones gráficas a símbolos a través de programas de computador, ventajas que superan el "lápiz y papel" y permiten entre otros confirmar visualmente demostraciones.
- La *capacidad investigativa*, al realizar múltiples variantes de un ejercicio, da pie a la formación de nuevas preguntas cada vez más interesantes.
- El *aprendizaje de la retroalimentación*, donde la posibilidad del estudiante de tener el autocontrol del trabajo realizado con información rápida del software le permite la reflexión pertinente sobre sus errores, poner a pruebas sus propias conjeturas y modificar sus ideas.
- La *observación de patrones*, debido a la velocidad de las computadoras y calculadoras el estudiante puede visualizar patrones y elaborar justificadas generalizaciones a través de la construcción de tablas.

- *El establecimiento de conexiones,* las computadoras permiten enlazar procesos rápidamente, por ejemplo, graficar tablas de datos o ecuaciones, ayuda a los estudiantes a comprender relaciones entre ellas.

Por último, en el aprendizaje de **contenidos**, muchas de las ideas matemáticas que antes se transmitían con "lápiz y papel" de forma estática, ahora se vuelven dinámicas y accesibles para el alumno, modificando sustancialmente las formas de construcción del conocimiento y la naturaleza misma de ese conocimiento, ampliando los entornos de aprendizaje y el fortalecimiento de cada uno de los *Pensamientos Matemáticos* y sus sistemas (MEN, 1999, págs. 40-63).

- *Pensamiento Numérico*, las tecnologías explotan las relaciones entre diversas formas de representación de los números y sus operaciones, proporcionando estrategias para comprender y estimar el resultado de un cómputo, por ejemplo. esto proporciona un ambiente para explorar y desarrollar patrones numéricos, diseñar algoritmos, usar tablas, preparatorio para el pensamiento algebraico.
- *Pensamiento Variacional*, se espera que, el estudiante no solo vea el objeto matemático en pantalla sin interpretar lo visualizado, por el contrario, que observe si las propiedades analíticas se cumplen, donde la tecnología permita a su vez, la creación de procedimientos generales en donde estén presente variables y operaciones entre ellas, así como escribir expresiones algebraicas y resolverlas rápidamente.
- *Pensamiento Espacial* y *el Pensamiento Métrico*, el uso de programas gráficos ha posibilitado la visualización de propiedades geométricas no solo de la geometría plana sino de muchas más, permitiendo la exploración y manipulación directa y dinámica de objetos geométricos que conduce a la elaboración y validación de conjeturas a partir de la relaciones y propiedades que presentan también les permite usar los errores constructivamente como parte del aprendizaje.
- *Pensamiento Aleatorio*, los conceptos estadísticos sencillos que históricamente han estado relegados del currículo por el problema con los cálculos, pueden ahora ser trabajados de una forma más apropiada con ayuda de las TIC, es el caso del manejo de probabilidades, distribuciones, reducción cuadrática, etc. que traen en si una gran cantidad de datos a analizar.

5.3.1. Uso de software: Excel y GeoGebra

El uso de *software educativo* para facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje de cualquier área ha ido poco a poco ganando terreno en la planeación docente en todos los niveles de escolaridad. Programas como Excel y GeoGebra son algunos de los softwares más usuales y ricos para la enseñanza de la matemática, presentan no solo herramientas con fines empresariales sino didácticos para la enseñanza, adaptadas al currículo y a los niveles de los estudiantes, estos brindan, en palabras de Mario Suazo citando a otro autor, en su tesis de maestría (2015, pág. 36), las siguientes funciones:

- Motivadora: anima a los estudiantes captando su atención.
- Instructiva: de forma intuitiva o guiada se aprende a conocer las funcionalidades.
- Informativa: los programas proporcionan estructura de la realidad de los contenidos.
- Evaluativa: tanto la actitud como los conocimientos asimilados son explícitos y posiblemente medibles con el uso de TIC.
- Investigadora: exige que el usuario haga consultas constantes en diferentes medios para aclarar dudas o validar hipótesis.
- Expresiva: cuando el usuario experimenta expresando sus ideas a través de la sintaxis del programa.
- Innovadora: Se suelen utilizar la tecnología o actualizaciones más recientes como material didáctico.
- Lingüística: el usuario puede aprender lenguajes propios de la informática.
- Lúdica: Crea ambientes y experiencias armónicas en los usuarios.

En términos generales, tanto GeoGebra y Excel son paquetes muy útiles para la enseñanza de la matemática porque integra tres ambientes propios de la actividad matemática activa: 1) Cuentan con una *Hoja de Cálculo* donde se pueden introducir datos alfanuméricos en pequeñas celdas y relacionar la información con cualquier tipo de operadores, ecuaciones, fórmulas, funciones, e iteraciones, 2) Traen un paquete graficador o menú para insertar cualquier tipo de formas geométricas (punto, línea, circulo…) o formas generadas por tablas de puntos, y 3) Una base de datos que permite introducir nociones básicas de programación (secuencias, condiciones y ciclos) en filas y columnas, Todo esto, como parte de la creación de programas y algoritmos para generar *los conjuntos de Julia y Mandelbrot*.

6. MARCO CONCEPTUAL

6.1. DESDE LOS NÚMEROS COMPLEJOS AL CONJUNTO DE MANDELBROT

6.1.1. Números Complejos

Por simplicidad del trabajo se suponen conocidas varias propiedades de los números reales. Lejos de su apabullante nombre, los *números complejos*, simples y elegantes, comprenden una historia fascinante. Desde su descubrimiento como fruto de la solución de una ecuación cubica importante, publicado en 1542 por el matemático Gerolamo Cardano en su libro *Ars Magna*, su intrincada aceptación por parte de la comunidad matemáticas, sus diferentes nombres, hasta su formalización propuesta por Carl Gauss, estos números han posibilitado el desarrollo de las ciencias, la ingeniería (Aurentz, 2017), la tecnología y el avance en la comprensión del establecimiento político y económico del mundo (Borjón Nieto, 2002). Se puede profundizar más en este tema en los trabajos de Claudia Arredondo (2016) y Ever Garcia (2018) quienes hicieron un gran aporte histórico y didáctico en la comprensión de estos números.

Definición

Según Ruel V. Churchill y James W. Brown (1992) los *números complejos* se pueden definir como **pares ordenados**

$$z = (x, y) \qquad (1)$$

de números reales x e y con operaciones de suma y producto que se explica mas adelante.

Los números complejos $(x, 0)$ se conocen como *parte real* y $(0, y)$ *parte imaginaria pura*. Por tanto, el conjunto de los números complejos contiene los números reales como subconjunto.

Si denotamos la *parte real* de un número complejo como x, y como i el número imaginario $(0,1)$, se puede escribir la ecuación como

$$(x, y) = x + iy \qquad (2)$$

Así, dos números complejos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son iguales si tienen ***iguales*** las *partes reales* y las *partes imaginarias*.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \text{si y solo si} \quad x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

La ***suma*** y el ***producto*** de dos números complejos se definen por las ecuaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (3)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (4)$$

Si se restringe, de (3) y (4) las operaciones a la parte real, se tiene

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad (5)$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0) \quad (6)$$

En consecuencia, los números complejos son una extensión de los números reales.

Propiedades de la suma de Números Complejos

Sean $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ e\ \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Clausurativa: si $z_1,\ z_2,\ \in \mathbb{C}$, entonces $z_1 + \ z_2, \in \mathbb{C}$
2. Conmutativa: $z_1 + \ z_2 = z_2 + z_1$
3. Asociativa: $z_1 + z_2 + z_3 = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4. Modulativa: Existe un elemento único e tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple que
5. $e + z = z + e = z$. Siendo $e = 0 + 0i$. A este elemento lo llamamos el neutro aditivo en $\mathbb{C}$
6. Invertiva: Para todo z existe un elemento inverso aditivo z' tal que $z + z' = z' + z = e$. Siendo $z' = -z$. A este elemento lo denominamos inverso aditivo en $\mathbb{C}$.

Propiedades de la multiplicación de Números Complejos

Sean $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ e\ \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $z_1z_2 = z_3,\ \ donde\ z_3\ \in \mathbb{C}$
2. Conmutativa: $z_1z_2 = z_2z_1$.
3. Asociativa: $z_1z_2z_3 = (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$
4. Modulativa: Existe un elemento único e tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple que $ez = ze = z$. Siendo $e = 1 + 0i$. A este elemento lo llamamos el neutro multiplicativo en $\mathbb{C}$.
5. Invertiva: Para todo z existe un elemento inverso multiplicativo z' tal que $zz' = z'z = e$. Siendo $z' = \frac{1}{z} = z^{-1}$. A este elemento lo denominamos inverso multiplicativo en $\mathbb{C}$.
6. Distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Todas estas propiedades son fácilmente demostrables, se pueden encontrar en el texto del doctor José Rodrigo González Granada (2007, pág. 8) o en el del doctor Ruel V. Churchill (1992, pág. 4).

Teorema:

El conjunto de los Números Complejos $\mathbb{C}$**,** con las operaciones suma y multiplicación por un escalar real o complejo forman un campo[1].

Interpretación Geométrica

Los números complejos se puede representar como puntos en el plano, conocido este como plano Argand[2], cuyas coordenadas rectangulares sean x e y. También se puede representar en forma angular con coordenadas (r, θ) donde r es el *módulo* de z y θ es el *argumento,* a esto, en algunos textos los presentan como vectores o pseudo vectores.

De acuerdo con la definición de ***suma***, ecuación *(3)*, se puede interpretar vectorialmente siguiendo el *método del paralelogramo.*

Coordenadas rectangulares *Coordenadas angulares*

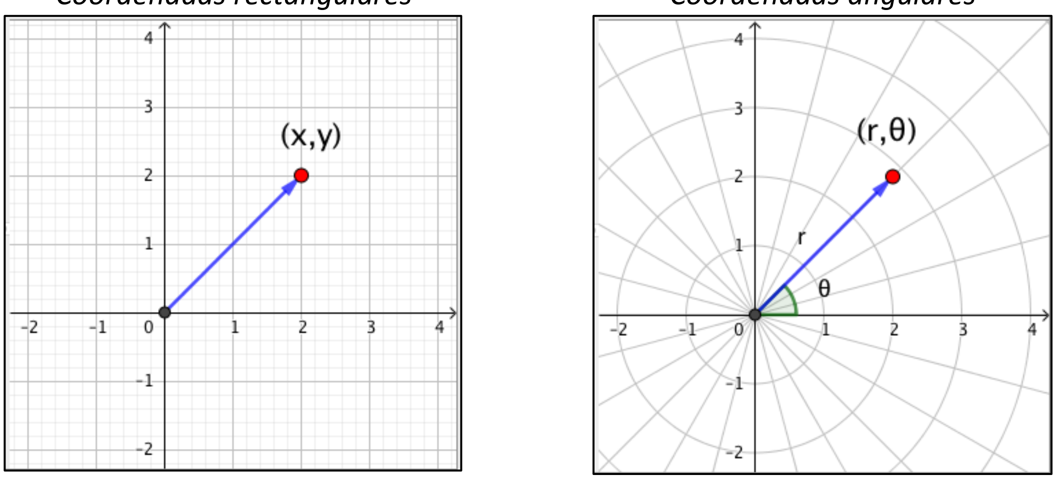


Ilustración 5. *Tipo de coordenadas.*
Fuente: *Elaboración propia en GeoGebra*

Por ejemplo, sea $z_1 = (3,1)$ y $z_2 = (1,4)$, su suma $z = z_1 + z_2 = (3+1, 1+4)$ sería entonces $z = (4,5)$ como se ve a continuación.

---

[1] En álgebra abstracta un campo o cuerpo es una estructura algebraica, que relaciona un conjunto, las operaciones de suma y resta y sus propiedades.

[3] Jean Rober Argand (1768-1822), matemático aficionado y contador francés que representó los números complejos en un plano 1806.

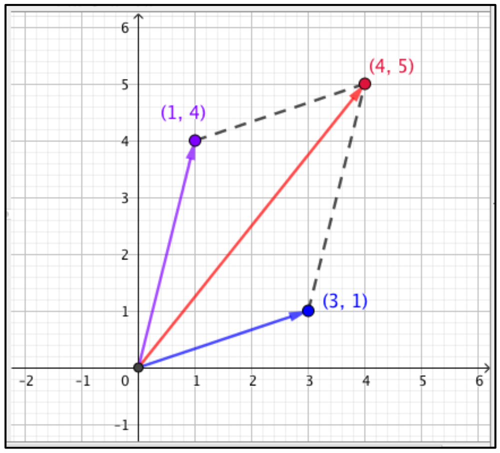


Ilustración 6: *Suma de números complejos.*
Fuente*: Elaboración propia en GeoGebra.*

Para el **producto**, las cosas cambian un poco, su representación geométrica se entiende de manera más sencilla si, se cambia su notación cartesiana a la forma angular. El producto entre dos números complejos z_1, z_2 se obtiene entonces, multiplicando sus *módulos* y sumando sus *argumentos* (González, 2007, pág. 23).

Sea $z = (x, y)$, en coordenadas angulares será

$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\,, \arctan\frac{x}{y}\right) = (|z|, Arg[z]) = (r, \theta)$$

Así, el producto entre dos números complejos z_1, z_2 sera:

$$z_1 z_2 = (|z_1||z_2|\,, Arg[z_1] + Arg[z_2]) \tag{7}$$

Demostración:

Sea $z_1 = (r_1, \theta_1)\,, z_2 = (r_2, \theta_2)$ números complejos, usando la representación exponencial [3]de un número complejo tenemos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$realizando el producto queda $z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = (r_1 r_2)\left(e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ luego, en coordenadas angulares obtenemos $z_1 z_2 = (r_1 r_2\,,\ \theta_1 + \theta_2)$ □.

Por ejemplo, para los números complejos $z_1 = (2{,}2)\ \ y\ \ z_2 = (0{,}1)$ que en coordenadas angulares serian $z_1 = \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = (2, \frac{\pi}{2})$ su producto será entonces, aplicando la ecuación (7), $z_1 z_2 = (\ 4\sqrt{2}\,, \frac{3\pi}{4})$

---

[3] La relación entre los números complejos y la exponenciación se expresa en la famosa fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

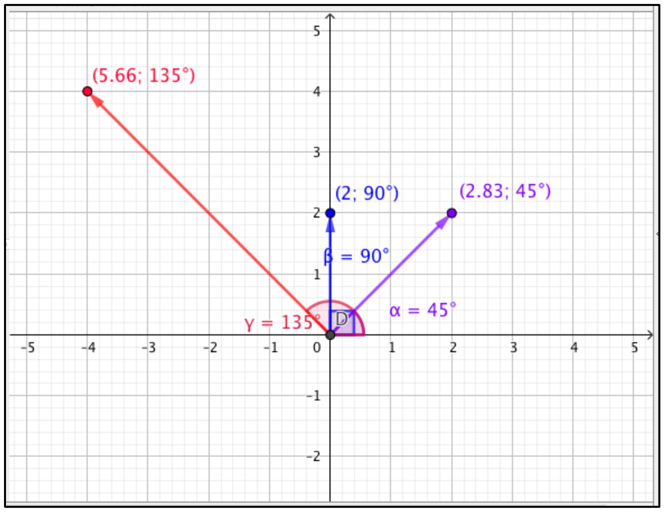


Ilustración 7: *Producto de números complejo.*
Fuente*: Elaboración propia en GeoGebra.*

Transformación de los números complejos

Según González (2007) se llama transformación o función de variable compleja f definida sobre un conjunto $D \subset \mathbb{C}$, como la regla que asigna a cada $z \in D$ un número complejo $w \in \mathbb{C}$.

$$f\colon\ D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \qquad \rightarrow f(z) = w$$

D es el dominio de definición de la transformación.

$$w = \ f(z) = (u(x,y)\,, v(x,y))$$

$$z = (x,y), \qquad u = \Re e f(z) = \Re e\, w, \qquad v = \Im m\, f(z) = \Im m\, w$$

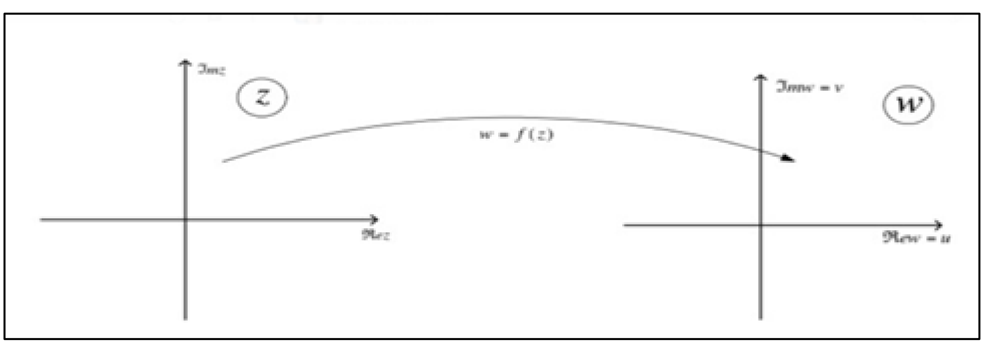


Ilustración 8: *Función de variable compleja.*
Fuente*: (González, 2007).*

Transformación lineal

Es una transformación de la forma $w = \alpha z + \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$. La cual podemos interpretar de las siguientes formas:

1. Si $\alpha = (0,0)$. Luego $w = \beta$. Esta transformación o mapeo, lleva a todo punto del plano z a un único punto en el plano w.
2. Si $\alpha \neq (0,0)$, $\beta = (0,0)$. Entonces $w = \alpha z$. Donde los puntos del plano z sufren una dilatación del radio y una rotación del ángulo, ecuación (7).
3. $w = \alpha z + \beta$. Con $\alpha \neq (0,0)$ y $\beta \neq (0,0)$. en la cual se presenta una traslación y simultáneamente una dilatación y rotación del ángulo.

Transformación cuadrática

Es una transformación de la forma $w = f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$. Donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ y $\alpha \neq (0,0)$.

El caso más elemental de esta transformación es la expresión.

$$w = f(z) = z^2 = zz = (x, y)(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Esta transformación mapea rectas del plano z en curvas (parábolas) en el plano w.

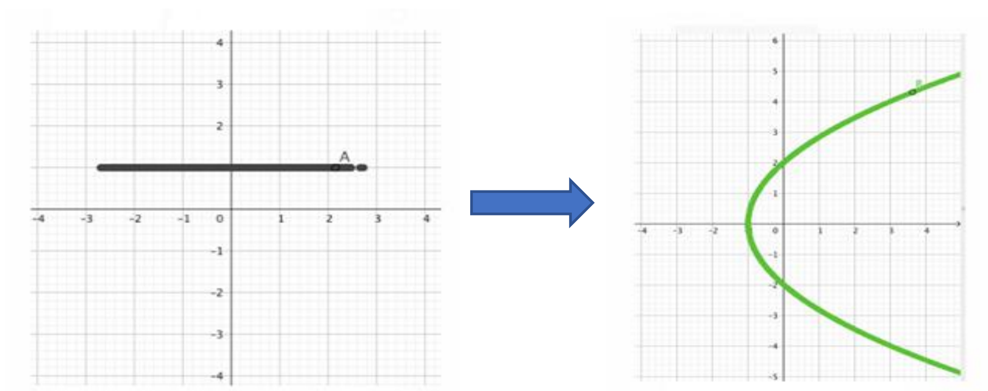


Ilustración 9: *Transformación.*
Fuente: *(García, 2018)*

Iteraciones de números complejos

Dado una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y un número complejo $z \in \mathbb{C}$, al aplicar sucesivamente la función f al punto z, origina las **iteradas** de la función f en el punto z, llamado también orbita $O_f(z)$ de f en el punto z, esto es, $z, f(z), f\big(f(z)\big), f\Big(f\big(f(z)\big)\Big)$ … o de otro modo

$$O_f(z) = \{z, f(z), f^{**}(z), f^{***}(z), \ldots, f^n(z), \ldots\} \qquad (8)$$

Donde $f^n(z)$ denota las composiciones n-ésimas de la función, no la potencia de f ni la derivada. "Esta sucesión genera lo que se conoce como un sistema dinámico discreto, el cual se caracteriza por la aplicación de una función a un punto una y otra vez" (Rubiano, 2009, pág. 30). Claro está que cada punto generado es un punto en el plano coordenado.

Referente a lo anterior, cabe destacar que los puntos que se genera son caóticos en la mayoría de las funciones, pero hay ciertas clases de funciones, como lo son las funciones cuadráticas de la forma $f(z) = z^2 + c$, que no lo son tanto. Si escogemos un número complejo, dígase $z_1 = (0.9\,, 0.2)$, y lo iteramos en una de estas funciones con $c = (0{,}0)$, siguiendo la ecuación *(8)*, como se muestra la siguiente tabla, se notará cómo los puntos en cada iteración tienden hacia un valor específico, en este caso $(0{,}0)$, es decir, la sucesión *converge* a un punto.

Iteración		***Resultado***	***Módulo***
(x, y)	$(0.9{,}0.2)$	$(0.9{,}0.2)$	0.92
$f(x, y)$	$f(0.9{,}0.2)$	$(0.77{,}0.36)$	0.85
$f^*(x, y)$	$f(0.77{,}0.36)$	$(0.46{,}0.55)$	0.72
$f^{**}(x, y)$	$f(0.46{,}0.55)$	$(-0.09{,}0.51)$	0.52
$f^{***}(x, y)$	$f(-0.09{,}0.51)$	$(-0.26, -0.1)$	0.27
$f^{****}(x, y)$	$f(-0.26, -0.1)$	$(0.06{,}0.05)$	0.07
$f^{*****}(x, y)$	$f(0.06{,}0.05)$	$(0{,}0.01)$	0.01
$f^{******}(x, y)$	$f(0{,}0.01)$	$(0{,}0)$	0
$f^{*******}(x, y)$	$f(0{,}0)$	$(0{,}0)$	0

Tabla 1: *Iteración de la función* $\boldsymbol{f}$ *en (0.9 , 0.2)****.***

Fuente: *Elaboración propia en Excel.*

Por el contrario, con el punto $z_2 = (1.5{,}0.5)$ y la misma transformación no sucede lo mismo:

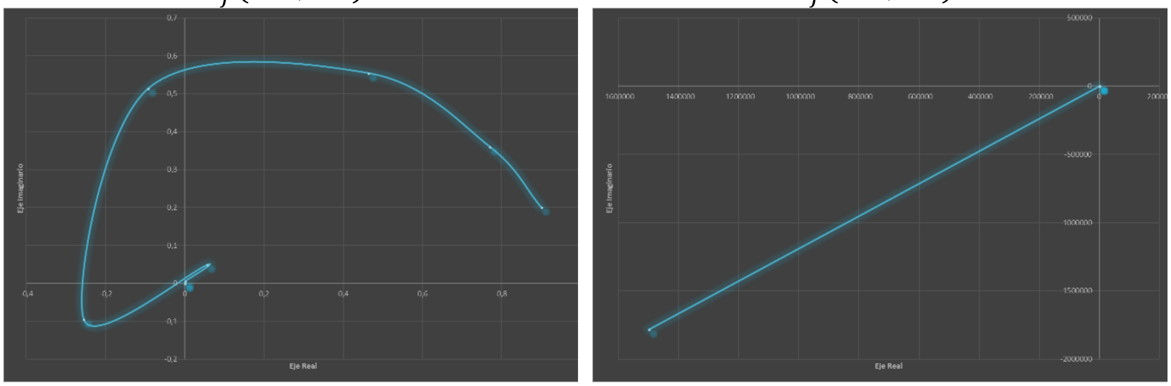
Iteración		***Resultado***	***Módulo***
0	$(1.5\,, 0.5)$	$(1.5\,, 0.5)$	1.58
1	$f(1.5{,}0.5)$	$(2\,, 1.5)$	2.5
2	$f(2{,}1.5)$	$(1.75\,, 6)$	6.25
3	$f(1.75{,}6)$	$(-32.94\,, 21)$	39.06
4	$f(-32.94{,}21)$	$(643.88\,, -1383.38)$	1525.88
5	$f(643.88\,, -1383.38)$	$(-1499146.3\,, -1781451.9)$	2328306.44
6	$f(-1499146.34\,, -1781451.96)$	$(-926131336\ldots\,, 534131439\ldots)$	5421010862427.52
7	$f(-926131336705\,, 5341314399820.54)$	$(-276719\ldots, -989351\ldots)$	$293873587705571\ldots$

Tabla 2: *Iteración de la función f en (1.5 , 0.5).*

Fuente: *Elaboración propia en Excel.*

La sucesión **no converge** en ningún punto para z_2, a cada iteración su módulo seguirá creciendo, alejándose cada vez más del origen caóticamente.

$O_f(0.9\ ,0.2)$ $\qquad$ $O_f(1.5\ ,0.5)$



Converge a $(0{,}0)$ $\qquad$ Converge a infinito

Ilustración 10: *Tipos de convergencia.*

Fuente: *Elaboración propia en Excel*

¿Por qué sucede esto? ¿por qué algunos puntos convergen y otros no? ¿Cómo es posible predecir la convergencia de un punto cualquiera en el plano? ¿Cuántas iteraciones son necesarias para definir si un punto escapará o será atrapado?

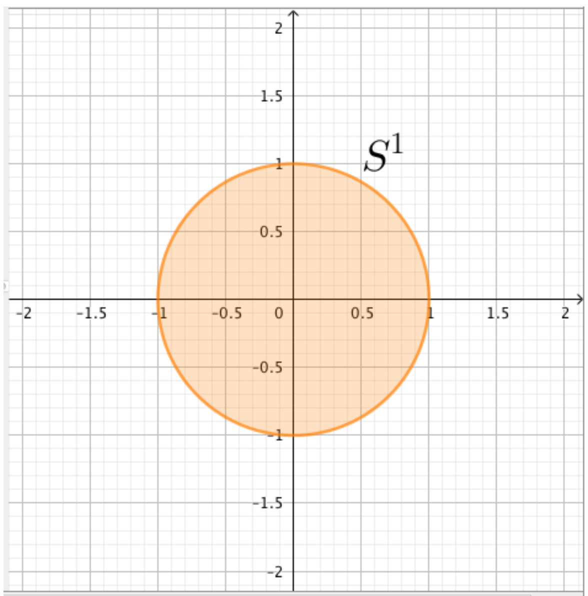
Los matemáticos franceses Gaston Julia (1893-1978) y Pierre Fatou (1878-1929) fueron los pioneros en darse cuenta de este fenómeno a principios del siglo XX, cada uno de forma independiente, y publicaron famosos tratados que explicaban muy bien el comportamiento de estos puntos del plano y a qué distancia se podía decir que los puntos escapaban o eran atrapados.

> *…en 1918 Julia publicó un tratado extenso y fascinante sobre el tema, al cual le seguiría en 1919, la estupenda trilogía de trabajos de Fatou. Estos trabajos juntos formaban lo que se conoce como el cimiento sólido del estudio contemporáneo de la dinámica compleja. ¿Por qué Fatou y Julia decidieron estudiar iteración? La respuesta es simple: en 1915 la Academia Francesa de Ciencias anunció que daría su Grand Prix des Sciences Mathematiques de 1918 a los estudios sobre iteración…* (Rubiano, 2009, pág. XIV)

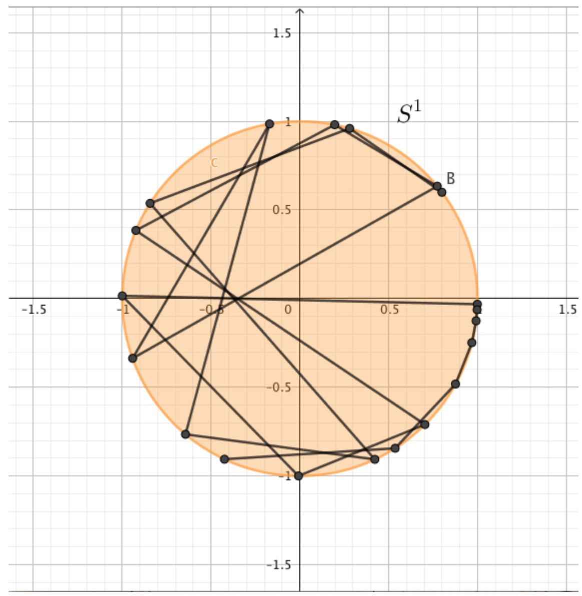
Se puede mostrar que para la función $f(z) = z^2$ la órbita de todo número complejo z se puede clasificar de tres tipos:

1. Si $|z| < 1$, su órbita converge siempre a $(0{,}0)$ (Puntos prisioneros)
2. Si $|z| > 1$, su órbita escapa caóticamente. (Puntos de escape)
3. Si $|z| = 1$, su órbita converge a un punto de circulo unitario. (Puntos en la frontera)

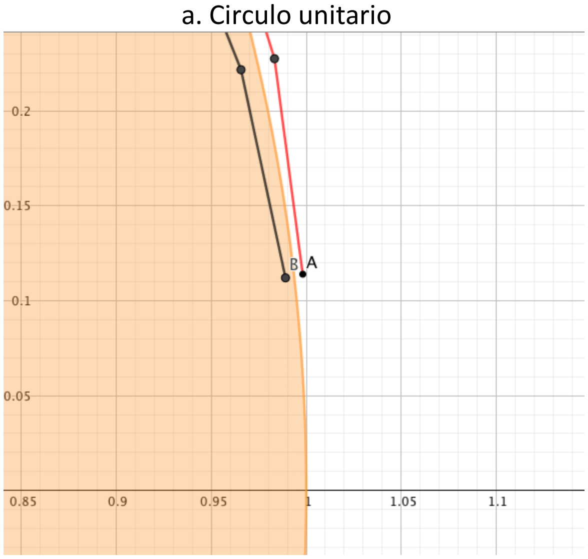
La circunferencia S^1 Ilustración 11a. se convierte así en la frontera entre los **puntos prisioneros** $\boldsymbol{P}$ y los **puntos de escape** $\boldsymbol{E}$. Esta frontera es muy *sensible* a las condiciones iniciales, es decir, si por casualidad el punto se encuentra en la frontera sus iteraciones también estarán en la frontera (Ilustración 11b), pero si dos puntos en el plano están muy cerca entre sí, pero uno está dentro de la frontera S^1 y el otro está afuera (Ilustración 11c), sus iteraciones se apartarán más y más (Ilustración 11d).



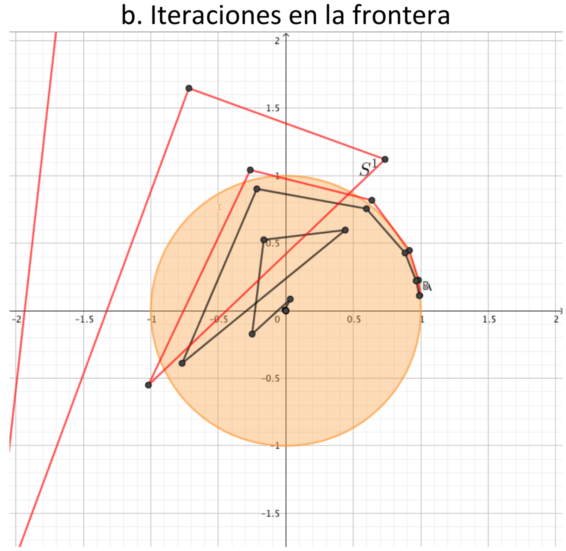
a. Circulo unitario



b. Iteraciones en la frontera



c. Puntos A y B al lado y lado de la frontera



d. Iteraciones de A y B

***Ilustración 11:** Relaciones de las Iteraciones entre puntos en la frontera.*
***Fuente:** Elaboración propia.*

6.1.2. *Conjuntos de Julia*[4]

Los *Conjuntos de Julia*[5] son una familia de subconjuntos del plano que están asociados a la iteración de puntos en funciones complejas $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con forma del polinomio cuadrático $z^2 + c$ donde $c \in \mathbb{C}$. Los elementos matemáticos formales de los conjuntos de Julia y Mandelbrot se definen bien en los trabajos de Robert L. Devaney (1994), en este documento sólo se estudiará la manera de cómo graficarlos y destacar algunas interesantes propiedades.

Como se observó anteriormente la órbita O_f para cada punto del plano dado la función f se definen de tres tipos: puntos prisioneros P_c, puntos de escape E_c y puntos en la frontera. Un conjunto de Julia J_c se forma por los puntos que se encuentran en la frontera, es decir, entre P_c y E_c, donde las funciones tienen un comportamiento caótico. De esto se deduce que, por ejemplo, Ilustración 11 b el conjunto de Julia $J_{c=(0,0)}$ está formado por los puntos que forman el borde de la circunferencia unitario S^1 y el *cuerpo* del conjunto está formada por el círculo y los puntos prisioneros (zona coloreada).

Sin embargo, para la frontera de la función cuadrática $z^2 + c$ cuando c es distinta de $(0,0)$ es casi imposible de dibujar, ya que esta curva o borde es altamente irregular. Para realizar esta hazaña, se debe hacer el recorrido por todos los puntos del plano complejo, buscando la frontera entre los puntos P_c y E_c, para lo cual, se usa en la actualidad programas de ordenador, quienes hacen estos cómputos rápidamente.

Por ejemplo, GeoGebra puede ir recorriendo el plano complejo, evaluar las órbitas de cada punto y pintar con determinados colores los puntos prisioneros y los de escape. Sin embargo, esto tiene sus limitaciones: Ningún equipo tecnológico actual puede evaluar todos los puntos del plano con un rango infinito y tampoco puede iterar cada punto indefinidamente -ya que muchos puntos no muestran su convergencia nunca o después de millones de iteraciones.

---

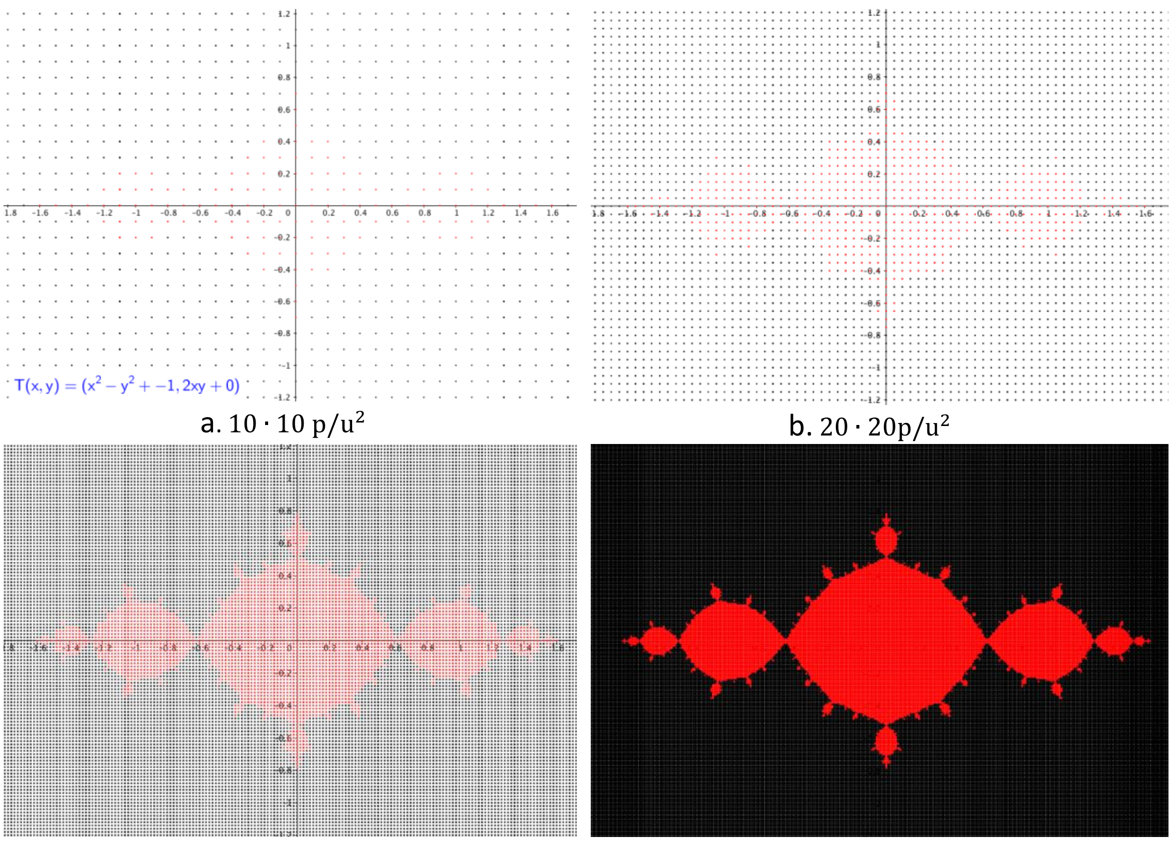
[4] Las ilustraciones de los conjuntos de Julia y Mandelbrot de este trabajo fueron realizadas por el autor por medio de los programas GeoGebra y Excel, que más adelante se explica cómo.

[5] Julia Gaston Maurice (1893–1978). Matemático francés. Julia fue un precursor en la teoría de los sistemas dinámicos complejos y en lo que hoy se conoce como fractales. Fue uno de los primeros en estudiar estos temas y explicar cómo a partir de cualquier función compleja se puede fabricar, por medio de una sucesión definida por inducción, un conjunto cuya frontera es imposible de dibujar a pulso (por ser de longitud infinita, entre otras propiedades).
Su notoriedad culminó al ser publicado su artículo informe sobre la iteración de las funciones racionales ("Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles") en la revista francesa de matemá- ticas Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Este artículo de 199 páginas le permitió ser galardonado por la Academia de las Ciencias Francesa. (Sabogal, 2011, pág. 171)

Según lo anterior, por estas limitaciones computacionales GeoGebra y otros programas sólo pueden operar en una región del plano limitado, no solo por sus terminaciones (horizontal y vertical) sino también por su densidad (puntos por unidad cuadrada) y cada uno de estos puntos debe: 1. Ser iterado un número razonable de veces, 2. Ser evaluada su convergencia; y 3. Ser pintado del siguiente modo:

- “Rojo” si es punto prisionero P
- “Negro” si es punto de escape E.

La separación entre puntos debe ser programado previamente, entre menos distancia halla entre puntos, más definida se observará la figura, el inconveniente en este último caso, es que se requiere más *tiempo de máquina* para realizar la figura completa.



a. $10 \cdot 10 \ \mathrm{p/u^2}$ b. $20 \cdot 20 \mathrm{p/u^2}$

c. $50 \cdot 50 \ \mathrm{p/u^2}$ d. $100 \cdot 100 \ \mathrm{p/u^2}$.

Ilustración 12: *Densidad.*

Fuente: *Elaboración propia.*

Por ejemplo, en la Ilustración 12 se muestra la figura para la función $f(z) = z^2 + (-1{,}0)$ donde $c = (-1{,}0)$. GeoGebra evalúa los puntos del plano entre $[-1.8\,, 1.8]$ para el *eje* x, y $[-1.2\,, 1.2]$ en el *eje* y. La densidad de puntos por unidad de longitud o área va variando según se desee y el número de iteraciones se determina hasta 30, además, se evalúa el criterio de convergencia de cada punto pintando de color rojo los que convergen y de color negro los que no.

En este sentido, como se observan en las ilustraciones anteriores, los puntos en la frontera de la figura van formando una curva bastante "extraña", con pequeños "abultamientos" que no se alcanzan a distinguir a simple vista.

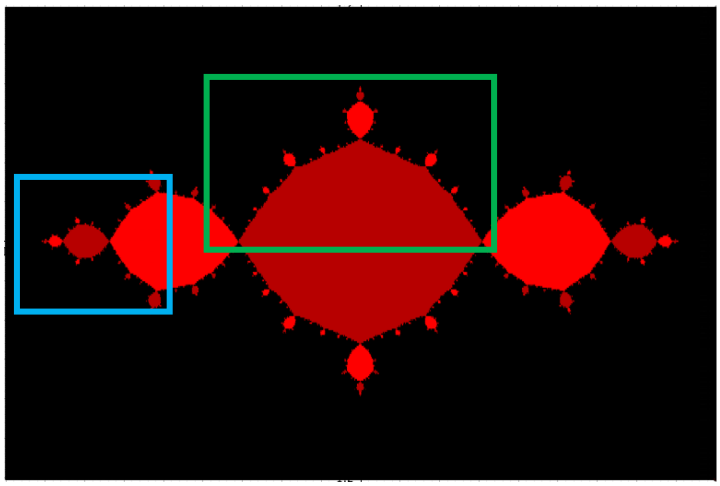


Ilustración 13: *Conjunto lleno de Julia* $J_{(-1,0)}$
Fuente: *Elaboración propia en GeoGebra.*

Por tanto, si se quiere replicar la imagen a lápiz y papel, es necesario conocer estos detalles y hacer que el programa amplíe la imagen y la densidad de puntos, para observar como son estos "abultamientos" y poder dibujar la línea de frontera con más precisión.

Como se observa en las imágenes, Ilustración 14, no parece sencillo entender lo que sucede, se puede entonces preguntar ¿cómo es, por qué y por dónde va exactamente la línea de frontera?, parece que entre más se amplíe la imagen para averiguarlo, salen más "abultamientos", lo cual hace imposible dibujar la curva completa y detallada, pero al mismo tiempo, se tiene la sensación de no ser tan complicada, porque estos "abultamientos" se repiten con un patrón. Esto no solo se observa cuando $c = (-1,0)$, lo mismo sucede con otras formas de Julia (Anexo 7), variando la constante c en el plano Πc. Las curvas de cada figura que de sus contornos salen se regeneran por cualquier trozo que de ellas se elijan, conservando la escala; y de nuevo se encuentra con un hecho fundamental, los conjuntos de Julia tienen una composición autosimilar, esencial en las **estructuras fractales**.

Parafraseando a José Borjón, la autosimilaridad, autosimilitud o autosemejanza es el alma de las figuras fractales, que alude a una repetición de detalles en escala descendente por la cual el objeto presenta la misma apariencia independientemente del grado de ampliación con el que se le mire, pues partes del objeto reproducen el objeto entero o partes del mismo (2002, pág. 88). Muchas de las formas de la naturaleza recuerdan esta propiedad: hojas de helechos, brócoli, nubes, árboles, montañas, caracoles, galaxias, átomos, sistemas del cuerpo humano - circulatorio o el nervioso-, e incluso la estructura socioeconómico mundial. Pareciera que la naturaleza utilizara caracteres fractales para buscar la máxima eficiencia y al mismo tiempo con una complejidad infinita.

> *Es difícil creer que la complejidad del mundo natural pueda basarse en ideas matemáticas sencillas, pero la teoría de las formas fractales ha puesto en evidencia que incluso los rasgos más complejos del mundo natural pueden recrearse utilizando fórmulas matemáticas sencillas*. (Du Sautoy, 2012, pág. 103).

Sección del conjunto $J_{(-1,0)}$ **Ampliación del recuadro izquierdo.**

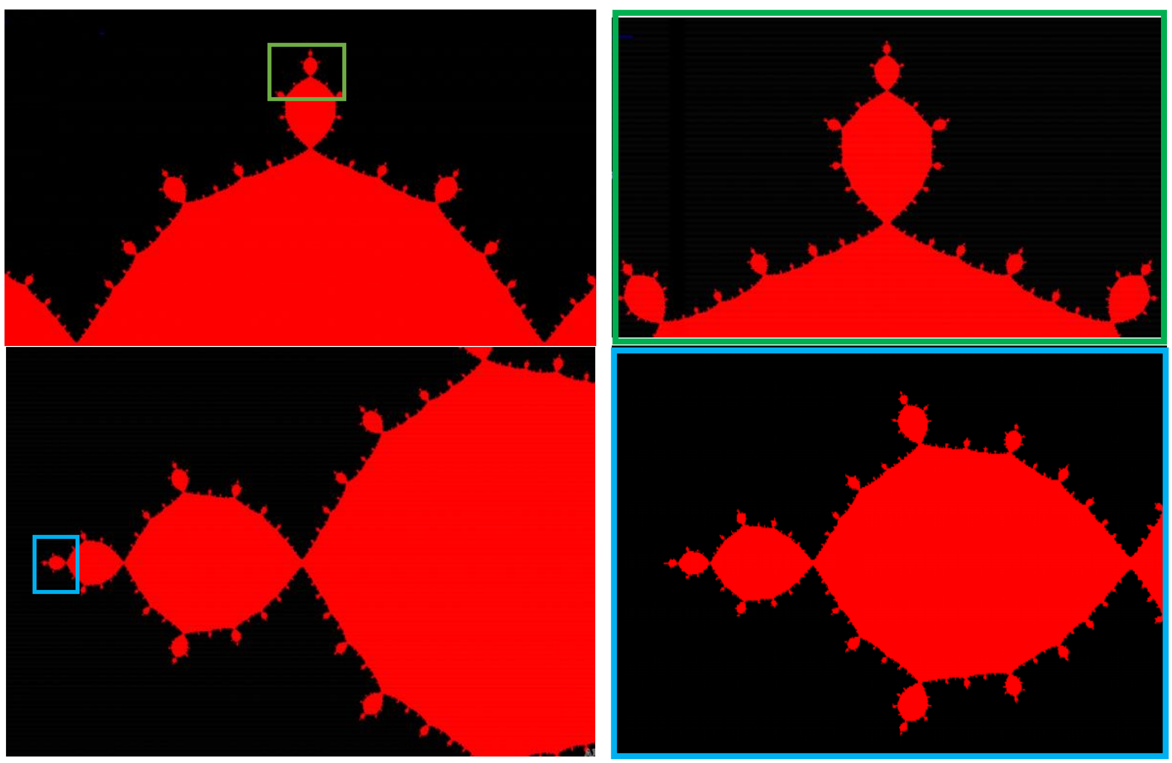


***Ilustración 14**: Ampliación del conjunto $J_{(-1,0)}$.*
***Fuente:** Elaboración propia en GeoGebra.*

6.1.3. Conjunto de Mandelbrot

Anteriormente se había dicho que cada valor de c en la función cuadrática $z^2 + c$, genera un conjunto de Julia distinto y atosimilares. Generando algunos estos conjuntos se pueden clasificar de dos tipos: *conexos y no conexos* (Ilustración 15). Los conjuntos *conexos* o compactos son aquellos que su cuerpo está formado en una sola pieza; y los *no-conexos*, son fragmentados, donde su cuerpo esta desmembrado en miles de secciones de puntos más o menos aislados, también llamados estos últimos, polvo de Fatuo (Talanquer, 2002).

Conjunto Conexo $\boldsymbol{J}_{(-1,0.5)}$ ***Conjunto no-conexo*** $\boldsymbol{J}_{(-0.75,0.25)}$

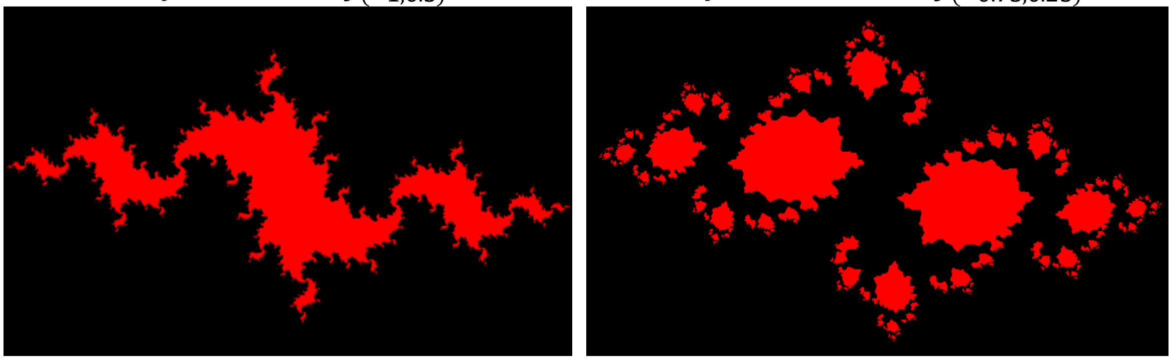
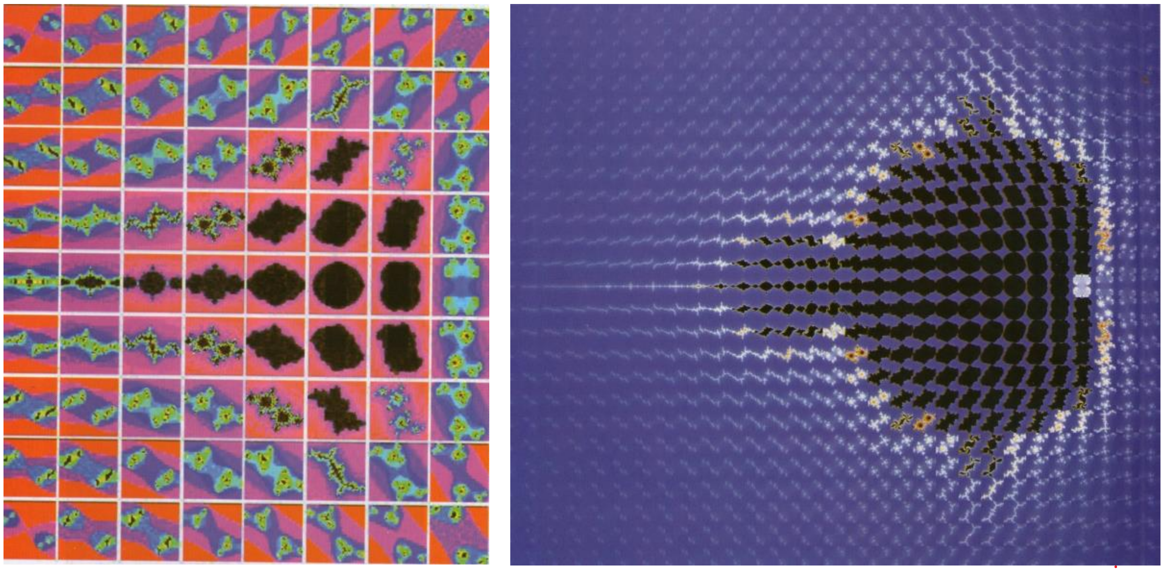


Ilustración 15: *Conjunto Conexo y no-conexo.*
Fuente: *Elaboración propia en GeoGebra*

Esta distinción geométrica permite aislar los puntos del parámetro complejo c de la función cuadrática en dos conjuntos bien diferenciados, los que dan lugar a figuras conexas y los que generan figuras no-conexas. ¿Es posible distinguir en el plano Πc estos dos grupos de puntos?

Pareciera un trabajo imposible: recorrer todo el plano variando c por un infinito número de puntos, generar un fractal por cada uno de estos y observar si es conexo o no-conexo, Ilustración 16. Mandelbrot resolvió el problema usando un teorema, demostrado de forma independiente, por Julia y Fatuo en 1919 que permite distinguir si un fractal de Julia es conexo o no-conexo aplicando la iteración sobre un solo punto, el origen, $z = (0,0)$ y ver si es punto prisionero P_c o escapista E_c mostrando que todo el conjunto generado por un determinado c es conexo o no. Solo se trata de pintar en el plano Πc los puntos conexos de rojo y los no conexos de negro.

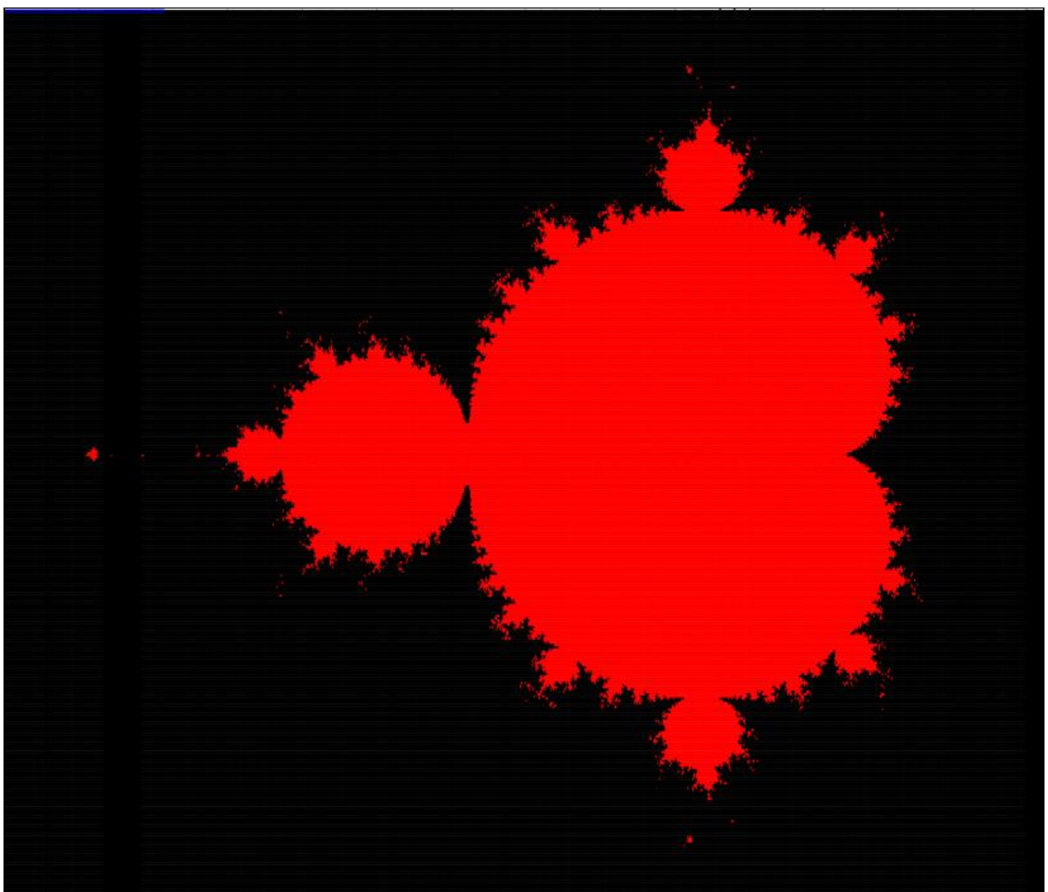
Es decir, en los años setenta, Mandelbrot se dedicó a buscar los valores de c que daban lugar a conjuntos conexos evaluando en cada caso solo un punto, el origen. Al hacerlo gracias a que trabajaba para el gigante de las computadoras IBM, pudo descubrir que este nuevo conjunto de c conexos también tenía una estructura conexa y formaba a su vez un conjunto con propiedades de autosimilitud cuando se le representaba en el plano complejo, en otras palabras, tenía una estructura fractal. Por este descubrimiento, este conjunto lleva su nombre. Véase Ilustración 17.



72 conjuntos de Julia *800 conjuntos Julia*

Ilustración 16: *Conjuntos de Julia formando el conjunto de Mandelbrot.*

Fuente: *(Rubiano, 2009, págs. 84,85)*



Cada punto c del plano complejo es pintado de negro o rojo. Los punto rojos forman un *conjunto de Julia* conexo y los puntos negros forman *conjuntos de Julia* no-conexos.

Ilustración 17*: Conjunto Mandelbrot.*

Fuente: *Elaboración propia.*

Aparentemente el *conjunto Mandelbrot* o *conjunto* M parece un corazón, casi con forma circular, al hacer acercamientos sobre él, se muestra cómo se repite su forma, incluso a una escala extremadamente pequeña. Aunque a simple vista pareciera que M es no-conexo, lo cierto es que se ha demostrado que es completamente conexo (una sola pieza), todos sus retoños están unidos por delgados hilos, y al ampliar sus retoños estos forman nuevamente la figura original. Es falso como algunos textos (Rubiano, 2009) y (Talanquer, 2002) afirman que los retoños a escalas muy pequeñas no son similares a M, por el contrario, este efecto se debe a la programación del número de iteraciones de cada punto en la región del plano donde se encuentran para formarlos, es necesario, por tanto, a escalas muy diminutas, tomar más iteraciones por punto y el conjunto M se vuelve a formar. Por otro lado, las ramificaciones o "bulbos" que se presentan en cada región del conjunto M siguen las mismas propiedades de los *Conjuntos de Julia* en esa misma región del plano (Rubiano, 2009, págs. 114-116).

6.1.4. Geometría Fractal: *Autosemejanza* y *Dimensión*.

Actualmente se cuenta con varias definiciones de fractal, pero todas se acercan a dos nociones básicas: autosimilaridad y dimensión. En principio, el término fractal fue acuñado por Benoit Mandelbrot[6] en la década de 1970, que significaba roto o fracturado, pero grandes matemáticos ya habían trabajado con este tipo de figuras un siglo antes, las llamaban "monstruos matemáticos".

Uno de los primeros fractales en estudiarse fue el Conjunto de Cantor[7] en 1874. Se construye a partir de un segmento de recta en un intervalo $[0,1]$, dividiéndose este en tres partes iguales y extrayendo de él la parte central, quedando dos partes. A continuación, se repite el proceso con cada una de las dos partes restantes, quedando así cuatro partes. Se repite el proceso indefinidamente. En el n-ésimo paso, existen 2^n segmentos o puntos, lo cual garantiza que en el intervalo hay infinitos puntos mientras n sea muy grande (Rubiano, 2009, pág. 6), ver Ilustración 18.

Otros fractales como la curva y el *copo de Koch*[8]; el *triángulo*, *cuadro* y *esponja de Sierpinski* (Ilustración 19); siguen los mismos procesos de iteración de operaciones y el

[6] Benoit Mandelbrot (1924-2010) Matemático Polaco, principal precursor del estudio de los fractales.
[7] Georg Cantor (1845-1918) creó la teoría de conjuntos e introdujo el concepto de los números infinitos, lo que abrió un campo totalmente nuevo en la investigación matemática. Veinte años después de que fuera demostrada la existencia de los números trascendentales.
[8] Helge Von Koch (1870-1924) fue un matemático sueco reconocido por su figura fractal copo de nieve, también hizo aportes a la teoría de números con su aporte a la hipótesis de Riemann, donde demostró que ésta es equivalente a una forma más fuerte del teorema del número primo.

principio de autosimilaridad, pero queda la pregunta, ¿qué se entiende por dimensión fractal?

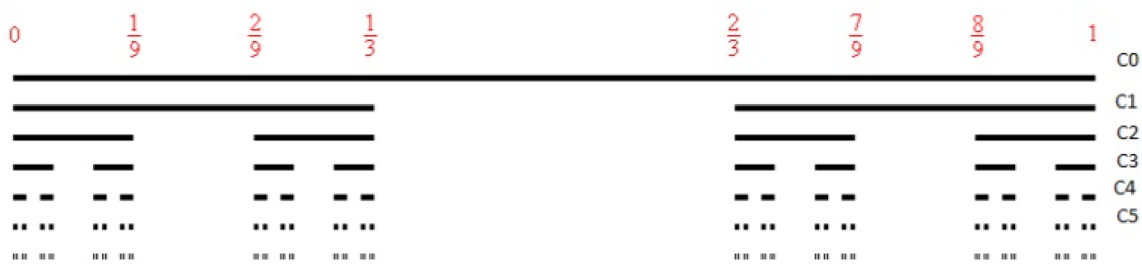


Ilustración 18: *Conjunto de Cantor.*
Fuente: *(Atencia, 2014)*

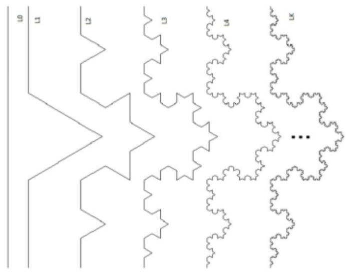
Desde los tiempos de Euclides se tiene el concepto de dimensión -habitualmente llamada dimensión topológica- como una medida topológica del tamaño de sus propiedades de recubrimiento, en palabras simples es el mínimo número de ejes coordenados requeridos para la representación de una figura (Márquez Vera, 2017, pág. 17) que, por ejemplo, un punto tiene dimensión cero ya que no se puede mover mientras que una recta tiene dimensión uno ya cualquier punto puede desplazarse para adelante y para atrás. Para un cuadro sus puntos pueden desplazarse arriba-abajo e izquierda-derecha, por eso tiene dimensión dos; y para un cubo su desplazamiento se encuentra en dimensión tres: alto, lago y ancho. Pero en un fractal las partículas no tienen tanta libertad, por ejemplo, en el triángulo de Sierpinski, la falta de algunas áreas hace que la dimensión de esta figura no pueda ser de dos, pero tampoco de dimensión uno, de igual forma para el copo de Koch y demás figuras antes mencionadas.

El pionero en este análisis de dimensión fue el matemático alemán Feliz Hausdorff[9] en 1919, quien amplio las bases matemáticas para este concepto y "adjudicó $\mathbb{R}^d$ dimensión d en el sentido de requerir d-coordenadas para la descripción de sus puntos" (Rubiano, 2009, pág. 20), en otras palabras "cuantificó hasta qué punto el objeto cubre el espacio en el que se encuentra inscrito" (Márquez Vera, 2017, pág. 30).

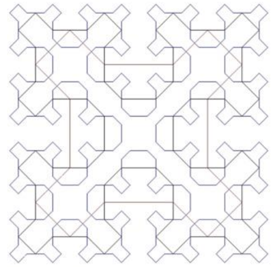
El truco consiste en comprender primero por qué una línea es de dimensión uno, mientras que un cuadro es bidimensional y un cubo tridimensional.

---

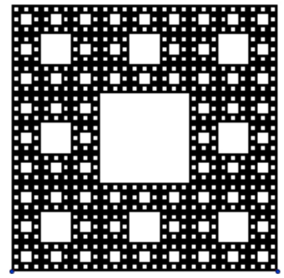
[9] Hausdorff Félix (1868–1942). Topólogo alemán, estableció los fundamentos de la topología general; desarrolló las nociones básicas de límite, continuidad, conexión y compacidad, piezas fundamentales de muchas estructuras matemáticas; una de sus ideas revolucionarias fue la de espacio de dimensión no entera. Fue también filósofo y escritor.



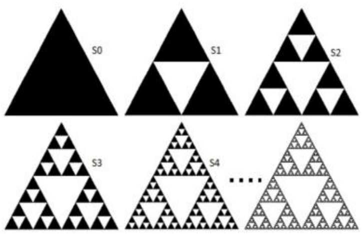
Curva de Koch



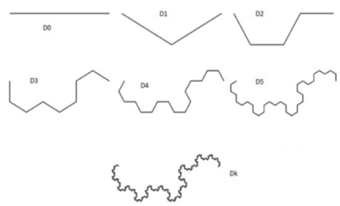
Curva de Sierpinski



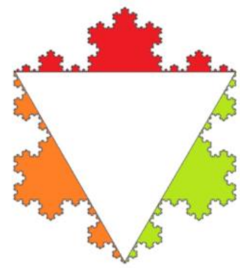
Carpeta o cuadro de Sierpinski



Triángulo de Sierpinski



Curva de Dragón



Copo de nieve de Koch.

Ilustración 19: *Fractales clásicos.*
Fuente: *(Atencia, 2014)*

Si se toma un segmento de línea lo dividimos en cuatro partes iguales (como también puede ser en k partes) la razón de $r = 1/4$ entonces apareen en la línea $N(4) = 4 = 4^1$, En general, $r = 1/k$ y $N(k) = k^1$, su dimensión es 1. Para un cuadro que se divida un lado a razón de $r = 1/4$, en el cuadro aparecerán 16 cuadrados, $N(4) = 16 = 4^2$, es decir, su dimensión es 2. Para un cubo seria $N(4) = 64 = 4^3$ de dimensión 3. Se puede concluir entonces

$$N = k^d \tag{9}$$

Donde podemos obtener d por medio del logaritmo, en cualquier base, en ambos lados de la igualdad.

$$\log N = \log k^d$$

$$\log N = d \log k$$

$$d = \frac{\log N}{\log k} \tag{10}$$

Para fines de esta investigación se usará el ***Método de Cajas (Box-Counting)*** para considerar la noción de dimensión de Hausdorff en figuras que no se subdividen necesariamente en copias exactas de sí mismo, como lo son la gran mayoría de objetos. Rubiano (2009, pág. 23) lo define de la siguiente manera

$$D(A) = \lim_{\delta \to \infty} \frac{\ln N_\delta(A)}{\ln 1/\delta} \tag{11}$$

Donde $N_\delta(A)$ es el número de cuadrados de lado $\delta > 0$ que cubren a A.

En términos prácticos se realiza de la siguiente forma: Sea una figura como la Ilustración 13, conjunto lleno de Julia $J_{(-1,0)}$, se recubre con una red de cuadricula regular de longitud δ_1, y se cuentan el número de cuadrados que se necesitan para cubrir la figura, obteniendo $N(\delta_1)$. Se realiza nuevamente el ejercicio anterior pero esta vez con cuadrados de longitud más pequeña δ_2 -entre mas pequeña mejor-, y se cuentan nuevamente el número de cuadrados $N(\delta_2)$. Por último, se halla la razón de escala entre las dos medidas, $k = \delta_2/\delta_1$ y $N_\delta(A) = N(\delta_2)/N(\delta_1)$ y se sustituye en la ecuación (*11*), reescribiéndose se obtiene:

$$D(A) = \frac{\ln\big(N_\delta(A)\big)}{\ln k} \tag{12}$$

Para hallar la dimensión con más precisión, en vez de usarse papel cuadriculado también se pueden usar la densidad de puntos pintados en el computador. En Excel se puede construir un algoritmo que cuente el número de puntos prisioneros P para un fractal con determinada densidad (puntos por unidad lineal) y obtener $N(P_1)$, luego se realiza el proceso nuevamente, pero con una densidad mucho mayor, dígase el doble, y se cuenta los puntos pintados $N(P_2)$.

Prmer conteo *Segundo conteo*

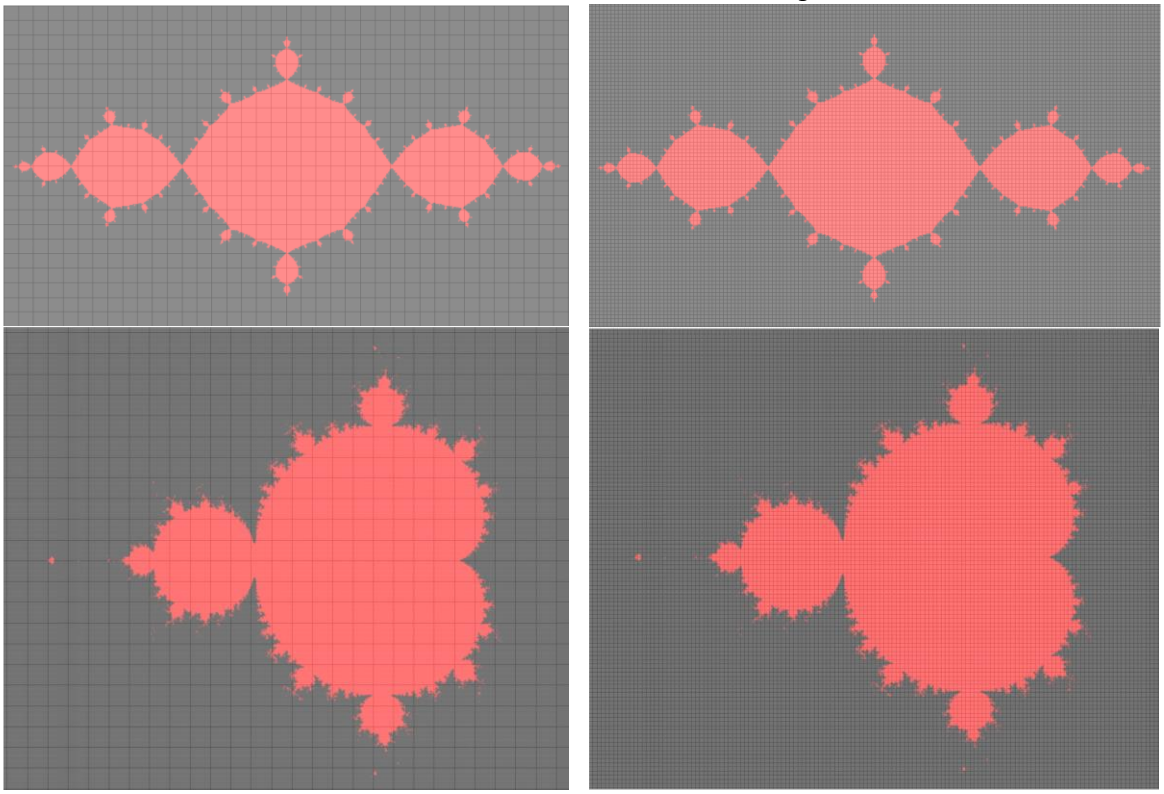


Ilustración 20: *Método de cajas para Julia y Mandelbrot.*
Fuente*: Elaboración propia.*

Por ejemplo, para la figura de la Ilustración 13, donde $J_{c=(-1,0)}$, el fractal puede ser generada en Excel con código *Visual Basic para aplicaciones* (

Anexo 5) o en GeoGebra (Anexo 6) y programada para que se vayan contando las iteraciones y puntos atrapados, según la densidad de puntos por unidad que se le programe (Ilustración 20).

CARACTERÍSTICAS	Conteo # 1
ITERACIONES TOTALES	3.015.039
PUNTOS DIBUJADOS	14.147
DENSIDAD (Puntos/Unidad)	100

CARACTERÍSTICAS	Conteo # 2
ITERACIONES TOTALES	12.065.207
PUNTOS DIBUJADOS	56.613
DENSIDAD (Puntos/Unidad)	200

Ilustración 21: *Conteo de pixeles para conjunto lleno de* $\boldsymbol{J}_{(-1,0)}$

Fuente: *Elaboración propia en Excel.*

Lo que lleva a calcular la dimensión sustituyendo los datos en la ecuación (*12*)

$$D\left(J_{c=(-1,0)}\right)=\frac{\ln\left(\frac{56.613}{14.147}\right)}{\ln\left(\frac{200}{100}\right)}=\frac{1,3867\ldots}{0,6931\ldots}=2,0006\approx 2$$

Se puede establecer lo mismo para el conjunto de Mandelbrot, esta vez con un factor de $k=5$:

CARACTERÍSTICAS	Conteo # 1
Iteraciones	1.761.547
Puntos atrapados	15.220
Densidad (P/U)	100

CARACTERÍSTICAS	Conteo #2
Iteraciones	45.410.351
Puntos atrapados	381.498
Densidad (P/U)	500

Ilustración 22: *Conteo de pixeles para Mandelbrot.*

Fuente: *Elaboración propia Excel*

Lo que lleva a calcular la dimensión sustituyendo los datos en la ecuación (*12*)

$$D(M)=\frac{\ln\left(\frac{381.498}{15.220}\right)}{\ln 5}=\frac{3,2214\ldots}{1,6094\ldots}=2.0016\approx 2$$

Para el conjunto lleno de Julia y Mandelbrot sus dimensiones topológicas son de 1 pero la dimensión de Hausdorff es de 2, la máxima posible al ser subconjuntos del plano.

Considerando lo anterior, la dimensión Hausdorff es la forma como Benoit Mandelbrot llama a la dimensión fractal en su famoso libro *The Fractal Geometry of Nature* (1982). En este sentido se tomarán sus palabras y se acuerda una definición de fractal.

6.1.5. Definición de fractal:

Para Mandelbrot un fractal es un subconjunto del plano que es autosimilar y cuya dimensión fractal excede a su dimensión topológica (Rubiano, 2009). Sin embargo, esta es una definición muy abstracta. Un fractal es, como una forma geométrica áspera o fragmentada que se puede subdividir en partes, cada una de las cuales es, aproximadamente, una copia de tamaño reducido del conjunto. Los fractales son generalmente autosimilares e independientes de escala. Contienen uno o varios ejes de simetría, al mismo tiempo que presentan propiedades de rotación, traslación y rotación propios de figuras con categorías de semejanza.

7. DISEÑO METODOLÓGICO

7.1. Enfoque de la investigación

Teniendo en cuenta el objetivo del este trabajo y su modelo didáctico, la investigación se lleva a cabo con un enfoque mixto, en el sentido como lo propone Darío Echavarría (2016) y Zulay Pereira (Junio 2011), siendo una integración o combinación entre las metodologías cualitativas y cuantitativas de investigación, usando las ventajas que cada una contempla.

Este enfoque invoca la conversión de datos cualitativos a cuantitativos y viceversa. Originado en investigaciones criminalísticas en la década de 1960, este enfoque actualmente es uno de los más aceptados en el mundo. Cabe destacar que el enfoque mixto va más allá de la simple recopilación de datos de diferentes modos sobre el mismo fenómeno. Implica desde el planteamiento del problema hasta el uso combinado de la lógica inductiva y la deductiva. Como indican Tashakkori y Teddlie (2003), un estudio mixto lo es en el planteamiento del problema, la recolección y análisis de los datos, y el informe del estudio.

Según Sampieri (2014, pág. 537) el enfoque mixto presenta varias ventajas para trabajar:

1. Logra una perspectiva más amplia y profunda del fenómeno, por tener naturaleza cualitativa y cuantitativa, se caracteriza los objetivos de estudio mediante números (variables numéricas, constantes, gráficas, funciones...) y lenguaje (textos, narrativas, símbolos...) e intenta recabar un rango amplio de evidencia para robustecer y expandir nuestro entendimiento de ello.
2. Produce datos más “ricos” y variados mediante la multiplicidad de observaciones, ya que se consideran diversas fuentes y tipos de datos, contextos o ambientes y análisis.
3. Potencia la creatividad teórica por medio de suficientes procedimientos críticos de valoración.
4. Apoya con mayor solidez las inferencias científicas.
5. Permite una mejor “exploración y explotación” de los datos.
6. Permite la obtención de una mejor evidencia y comprensión de los fenómenos y, por ello, facilitan el fortalecimiento de los conocimientos teóricos y prácticos.

Bajo estos postulados, este enfoque se orienta, en primer lugar, al análisis de los diversos fenómenos en la enseñanza aprendizaje para el desarrollo del pensamiento matemático estudiando los *Conjuntos de Julia-Mandelbrot,* dentro de la ingeniería didáctica. En segundo lugar, se recolecta la información cuantitativa y cualitativa de toda la secuencia, desde el pretest hasta el postest, permitiendo obtener así información estadística sobre la metodología, el avance de los estudiantes y las actitudes predominantes, en cada una de las etapas del proceso.

7.2. Herramientas Metodológicas

Para el diseño y aplicación de cada secuencia se toma el "Escalamiento Likert", desarrollada por el psicólogo Rensis Likert en 1932, como forma de medir los niveles de comprensión de cada concepto y la recolección de registros cualitativos y cuantitativos de la misma. Esta escala se desarrolla generando un número de afirmaciones que califiquen al objeto a evaluar, permitiendo evidenciar el grado máximo de satisfacción e insatisfacción, pasados por opciones intermedias. Esta escala es útil, para la calificación de coincidencias entre variables. Generalmente el número de alternativas es un número impar. En la tabla se muestra la descripción de la escala. (García, 2018)

PUNTAJE	INTERPRETACIÓN	EQUIVALENCIA
5	Muy de acuerdo	Procedimiento muy bien hecho
4	De acuerdo	Procedimiento aceptable
3	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Faltan procesos o En procedimiento
2	En desacuerdo	No es correcto el procedimiento
1	Muy en desacuerdo	No realiza ningún procedimiento

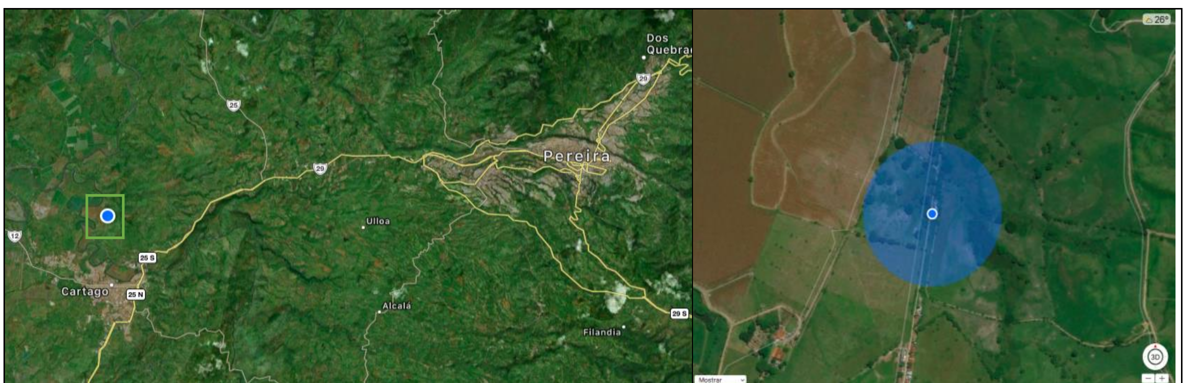
Tabla 3: *Escala de valoración tipo Likert.*
Fuente: *Elaboración propia.*

7.3. Población

Este proyecto se llevará a cabo con estudiantes de grado "octavo-noveno" pertenecientes a la educación secundaria del Centro Educativo Puerto Caldas. Este centro educativo es de carácter público, rural y de difícil acceso. La población a trabajar cuenta con el número de seis (6) estudiantes, estos habitan en veredas aledañas a la institución. Es de aclarar que el término octavo-noveno, se debe a que los dos los dos grados se encuentran unidos en un solo salón, tipo escuela nueva, por el número tan reducido de estudiantes en cada grado.

El Centro Educativo Puerto Caldas se encuentra en la vereda San Isidro en el extremo occidental del municipio de Pereira, con límites con Cartago. Cuenta con una población de menos de 150 estudiantes divididos en dos jornadas (Mañana: Primaria. Tarde: Bachillerato), con enseñanza en básica primaria desde preescolar, hasta la educación básica secundaria, (noveno grado).

Con respecto al Bachillerato, es relativamente nuevo, comenzó en el 2006, por tanto, tiene una población aún muy pequeña. Cuenta con cerca de 30 estudiantes en total, de los cuales sexto tiene 18 estudiantes, séptimo 6 y octavo-noveno 6. Con respecto a la situación socioeconómica de los estudiantes; no es la mejor, habitan en hogares muy deprimidos, no existe transporte hacia sus hogares, no hay acompañamiento en sus casas y la mayoría pertenecen a familias disfuncionales donde, en la mayoría de los casos, la madre es la cabeza del hogar.



El CEPC se encuentra ubicado en el corregimiento de Puerto Caldas municipio de Pereira, Risaralda. Este corregimiento está ubicado en el límite entre Pereira y Cartago. Desde el punto de vista hidrográfico, el río La Vieja marca el límite occidental del corregimiento siguiendo el camino del antiguo ferrocarril. Está conformado por los sectores de San Isidro, El Cofre, María Auxiliadora, Las Camelias, Los Almendros, El Porvenir, Puente Blanco, El Cafetalito y El Progreso.

Ilustración 23: *Mapa geográfico del CEPC.*
Fuente: *Plan de Riesgo CEPC.*

En la institución existen problemas de tipo social. Algunos niños presentan problemas de déficit de atención y la gran mayoría tienen problemas nutricionales. Afortunadamente el apoyo de los docentes y las ganas de salir adelante hace que estos estudiantes sigan asistiendo a la institución y soñar con alcanzar sus sueños.

A pesar de sus bajos recursos la institución cuenta con 6 salones, una sala de sistemas dotada de computadores (20 de mesa y 20 portátiles), de los cuales muchos no funcionan; un restaurante escolar que ofrece únicamente los almuerzos de forma gratuita (subsidiada por el estado); no tiene patio, los estudiantes hacen su educación física en una cancha privada aledaña a la escuela.

7.4. Plan de investigación

Como ya se ha dicho, el diseño metodológico de esta propuesta se apoya en la *Ingeniería Didáctica*, sustentada en la *Teoría de las Situaciones Didácticas* de Guy Brousseau. Es la apropiada para elaborar diferentes secuencias didácticas de enseñanza en la que se desarrollen proceso para construir saberes matemáticos que se deseen potencializar, para ello cuenta con cuatro fases de diseño, descritas en la Tabla 4.

Además, la Ingeniería didáctica, es un esquema experimental, basado en realizaciones didácticas en el aula, es decir, analiza los procesos de construcción, realización y análisis; y para validar las secuencias de enseñanza, se hará una comparación entre lo que se esperaba y lo que realmente sucedió durante el desarrollo de la clase.

Fases del diseño metodológico según la Ingeniería didáctica		
Fase	Objetivo	Actividad
Fase 1: Análisis preliminares.	Conocer los aspectos históricos, epistemológicos, didácticos y cognitivos implicados en el proceso de enseñanza de la geometría y algunos tópicos de la variable compleja.	Revisión bibliográfica de las principales dificultades epistemológicas en el desarrollo de las propiedades básicas de los conjuntos de Julia y Mandelbrot Análisis de las concepciones de los estudiantes respecto al aprendizaje de algunas propiedades de los fractales tales como la similaridad, la simetría y dimensión. Análisis didáctico de plan de estudios y guías de la institución acerca de los objetos matemáticos de estudio.

Fase 2: Concepción y análisis *a priori*.	Identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven problemas y situaciones de su entorno donde apliquen conceptos de la geometría fractal.	Diseño, construcción y desarrollo de situaciones didáctica sobre problemas aplicativos a propiedades de los fractales. Análisis de los resultados de la situación a didáctica para identificar las principales dificultades de los estudiantes tienen en la aplicación de los conceptos.
Fase 3: Experimentación.	Elaboración y análisis de una propuesta didáctica para el dominio y comprensión de las propiedades básicas de los fractales y usando los conocimientos básicos de la variable compleja.	Diseño, elaboración y aplicación de situaciones didácticas asociadas a los números complejos, y propiedades de los Conjuntos de Julia-Mandelbrot. Análisis de la comprensión alcanzada por los estudiantes al desarrollar las situaciones didácticas.
Fase 4: Análisis *a posteriori* y validación.	Validar el nivel de aprendizaje de los estudiantes sobre algunas propiedades de la geometría fractal	Análisis de los datos obtenidos a lo largo de la experimentación. Confrontación del análisis de la pruebas *a priori* y a posteriori de los niveles de comprensión alcanzado por los estudiantes sobre las propiedades de la geometría fractal.

Tabla 4: *Resumen de las cuatro fases de la ingeniería didáctica y actividades a realizar.*
Fuente*: Basada en (García, 2018).*

7.5. FASE I: ANÁLISIS PRELIMINAR

Según Michele Artigue y Régine Douady (1995) la investigación consta de tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica.

7.5.1. Análisis Epistemológico de la geometría fractal:

La geometría fractal comienza en el siglo XIX y forma parte de la Teoría del Caos, aunque no todos los fractales son caóticos. Sin embargo, las formas fractales se descubren mucho antes, ya los japoneses del siglo XV hacían pinturas que evocaban las formas fractales.

Ilustración 24: *"Olas de olas de olas" de Katsushika Hokusai (1760-1849)*
Fuente: *(Euclides59, 2018)*

Por la época del surgimiento del *Cálculo*, se descubrieron funciones que no eran suficientemente regulares con enormes discontinuidades, a estas las llamaban "monstruos matemáticos". Los especialistas de aquella época simplemente imaginaron que estas funciones eran poco frecuentes, ocasionalmente surgirían en un sistema natural y no merecían la atención adecuada. Sin embargo, para algunos matemáticos si valía la pena estudiarlas, así, fueron Cantor, Peano y Poincaré los primeros en estudiar con seriedad sus propiedades, abriendo el camino a un nuevo enfoque, la *Teoría del Caos* alrededor de 1880.

Ejemplos de estas "curvas monstruos" son, el conjunto de Cantor, la curva de Koch y la línea que llena el plano de Peano, entro otras (Ilustración 18 - Ilustración 19), "todas ellas estructuras matemáticas que no encajaban en la geometría euclidiana ni en la dinámica de Newton" (Jaramillo Ferro, 2018). Así surgen nuevas perspectivas y pensamientos en la comunidad científica por la necesidad de crear nuevas herramientas que pudieran explicar fenómenos más complejos, surge entonces el estudio de los sistemas dinámicos y caóticos, que se utilizaron como herramienta de aproximación para diversas aplicaciones en diferentes áreas.

Sin embargo, el término fractal no se definió formalmente hasta 1958 cuando Benoit Mandelbrot trabajando en las instalaciones de IBM intentaba analizar una perturbación eléctrica en las líneas de transmisión entre computadores, cuando se dio cuenta que estas se daban con cierta regularidad y su estructura no era común. Las fluctuaciones de interferencia se repetían con la misma regularidad sin importar la escala de tiempo que se midiese, eran idénticas si se escuchaba por un minuto, una hora o días. Mandelbrot solucionó el problema usando el conjunto de Cantor y empezó a imaginar que en otras estructuras naturales podrían encontrarse patrones idénticos que no pudiesen ser descriptos por la matemática existente y que actuaran de la misma manera.

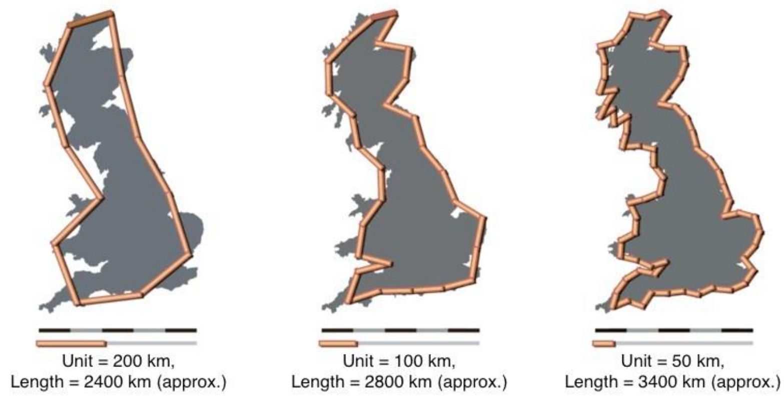


Ilustración 25: *Costa de la Isla de Gran Bretaña.*
Fuente: *(CIO, 2018)*

Mandelbrot puso a prueba su intuición y realizó muchos experimentos, estudió las fluctuaciones de los precios del algodón, la corriente del Rio Nilo y las costas de los países como la Isla de Gran Bretaña (Ilustración 25), encontró que tenían los mismos patrones que había observado en IBM. Esto le llevo a intuir que la esencia de la naturaleza tenía una forma geométrica que no se había tenido en cuenta antes y no encajaba con la geometría convencional.

Referente a esto último, los trabajos de Julia-Fatuo (1918) y de Hausdorff (1919) (mencionados en el marco conceptual), que habían hecho grandes aportes a los problemas de iteración de números complejos y al desarrollo de la *Teoría de la Medida* con la introducción de lo que hoy se conoce como dimensión fractal, permitieron a Mandelbrot dar una visión de la geometría diferente, más formal, relacionada con el análisis y la topología, abandonada por mucho tiempo desde la escuela Burbaki[10], y visual gracias a la invención del ordenador, Mandelbrot logra con su visión detectar características de auto semejanza y dimensión en estos patrones de la naturaleza para darles formalidad. Todo esto comenzaría a cambiar la manera de analizar los problemas de la naturaleza sobre todo los asociados a la variable compleja.

Mandelbrot crea entonces el término Fractal para referenciar a este tipo de fenómenos o estructuras que significa fracturado o quebrado en miles de partes y designa a todas aquellas formas detalladas a un gran rango de escalas. Gracias a su formación como matemático dio formalidad a su idea, publicó así "Fractales: Forma, casualidad y dimensión"

[10] Nicolas Burbaki: Grupo de matemáticos franceses de los años 30, quienes propusieron revisar los fundamentos de la matemática basándose en el rigor bajo el método axiomático.

(1975) y más tarde “La geometría fractal de la naturaleza” (1982), dando la definición de fractal más aceptada hasta ahora.

Para finalizar, en 1981 John E. Hutchinson publica un artículo llamado “Fractals and Self-Similarity”, en el cual, a partir de las ideas de B. Mandelbrot expuso una teoría muy formal y bien fundamentada de los que él llama conjuntos estrictamente autosimilares. Allí hace un estudio riguroso de la noción de autosimilitud en espacios métricos, usando conceptos y herramientas de la teoría de la medida. Es éste un artículo muy importante en lo que a geometría fractal se refiere, puesto que constituye uno de los trabajos pioneros, formales y rigurosos en cuanto al tratamiento matemático del tema. A partir de éste, y usando las definiciones allí establecidas, se genera una enorme cantidad de trabajos y publicaciones alrededor de los fractales, sus aplicaciones y la noción de autosimilitud que siguen aplicándose hasta nuestros días. (Sabogal, 2011, pág. 19)

7.5.2. Análisis Cognitivo:

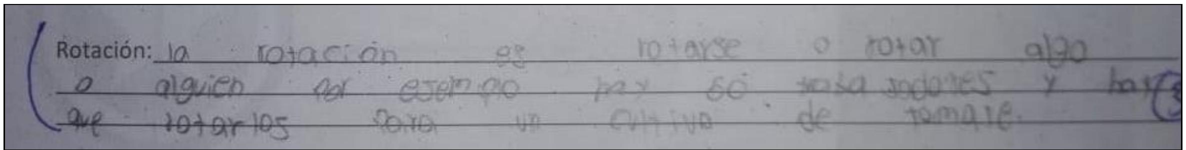
Con la finalidad de analizar los conocimientos previos que tienen los estudiantes se ha propuesto una encuesta con preguntas abiertas a estudiantes de octavo-noveno de la institución, con el fin de determinar los conocimientos previos que tienen acerca de algunas propiedades básicas de la geometría fractal, (Anexo 1).

La encuesta se realiza a 6 estudiantes de octavo y noveno. A continuación, se muestran los resultados en la siguiente tabla. Cada pregunta fue calificada con la *escala Likert*, de 1 a 5, donde 1 es muy en desacuerdo, 2 es en desacuerdo, 3 ni desacuerdo ni de acuerdo, 4 de acuerdo, 5 muy de acuerdo.

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	Prom/Est
1	1	2	1	3	1	2	1	1,6
2	1	1	1	1	1	1	1	1,0
3	1	3	1	3	1	1	1	1,6
4	4	4	1	3	1	2	1	2,3
5	1	1	1	2	1	2	1	1,3
6	1	3	1	2	1	1	1	1,4
Prom/Pregun.	1,5	2,3	1,0	2,3	1,0	1,5	1,0	

Tabla 5: *Resultados encuesta elementos de la geometría fractal.* ***Fuente****: Elaboración propia en Excel.*

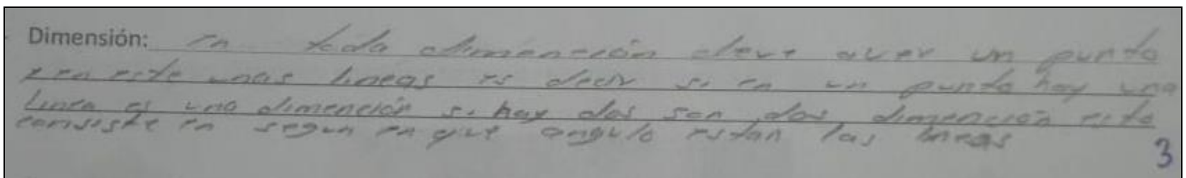
Como se observa en la tabla, los estudiantes tienen dificultades en los conceptos básicos a trabajar, sus respuestas demuestran que el desarrollo de su pensamiento geométrica tiene muchas fallas. El promedio de los resultados por estudiante no supera la mitad del puntaje de la escala, lo mismo sucede analizando el promedio por pregunta, ninguna supera el rango de 2 a 3.



“La rotación es rotarse o rotar algo o alguien, por ejemplo, 50 trabajadores y hay que rotarlos para el cultivo de tomate”

Ilustración 26: *Respuesta de un estudiante a la definición de rotación.*
Fuente: *Autor.*

También se detecta que algunos estudiantes tienen nociones en ciertos conceptos como dilatación y rotación, pero las habilidades para explicar de manera escrita no son adecuadas y por tanto algunas ideas no están, ni de acuerdo, ni en desacuerdo total. Así mismo, el estudiante 4, por ejemplo, logra acertar con las respuestas que tienen que ver con la simetría y sus características, pero no tiene conocimientos acerca de dimensión, fractal o autosimilitud.



“En toda dimensión debe haber un punto y en este unas líneas es decir si en un punto hay una línea es una dimensión si hay dos son dimensiones esto consiste en según que ángulo están las líneas”

Ilustración 27: *Respuesta de un estudiante a la definición de dimensión.*
Fuente: *Autor.*

Es curiosos que la gran mayoría de los estudiantes contestaron, que algo de estos conceptos sí los habían estudiado en otros momentos pero que ya se les había olvidado. Por último, se observa que cuando el estudiante no tiene conocimiento o no lo entiende muy bien, no es capaz ni de realizar un dibujo apropiado que lo ejemplifique.

7.5.3. Análisis Didáctico:

En esta sección se hace un análisis didáctico del plan de estudio y guías que la institución, Centro Educativo Puerto Caldas, tiene acerca de los objetos matemáticos de estudio: la geometría fractal y los algunos conceptos básicos de la variable compleja.

En primer lugar, al revisar detalladamente el plan de estudios de la institución (actualizado hasta 2017), se encuentra que, referente a la geometría fractal no se encuentra ningún tipo de temática u objetivo explícitos a desarrollar, sin embargo, parece que se deja implícito y abierto al docente al desarrollar la temática de las sucesiones cuando dice "Hallar el término general de sucesiones aritméticas y geométricas" (pág. 35) ya que como se observará más adelante uno de los textos de consulta de la escuela contiene un apartado de los fractales al desarrollar este tema. Todo esto, como objetivos para estudiantes de grado decimo y once. Por otro lado, el plan de estudios tampoco contiene ningún objetivo o temática explicita referente a la variable compleja, sus operaciones ni representaciones, al igual que antes, parece que se dejara a consideración del docente desarrollar o encontrarse con los números complejos cuando dice, en una de las competencias a alcanzar para un estudiante de grado noveno, "Hallar las raíces de una ecuación cuadrática, utilizando la formula general" (pág. 19).

En segundo lugar, la institución también cuenta con unos textos guía para docentes de todas las áreas, en esta biblioteca hay una colección de libros de la serie *Misión Matemática* de 2009, del grupo editorial *educar*. En uno de ellos se encuentra una sesión dedicada a la geometría fractal como parte de la unidad 2 del texto para estudiantes de grado 11 dedicada al estudio de las sucesiones, series y límites. (Vergara Saavedra, 2009, pág. 82).

En general los textos de esta serie comienzan sus capítulos haciendo una ambientación por medio de una lectura alusiva al contexto de cada tema a desarrollar, luego propone una serie de preguntas de interpretación con el texto anterior, en seguida presenta algunos cortos ejercicios explicativos, definiciones y por último una sesión extensa de ejercicios, donde el texto espera que el estudiante interiorice individualmente el concepto tratado. Algunos ejercicios requieren que el estudiante consulte por su cuenta, para su solución.

Referente al tema tratado, el texto a colación refiere la geometría fractal como parte explicativa de las temáticas de las sucesiones y límites. Comienza con un texto breve referente a la geometría de la naturaleza, y compara algunas formas naturales, como el copo de nieve natural con la forma en que la sucesión del fractal con el mismo nombre va tomando su forma por niveles. Luego realiza las siguientes preguntas:

- ¿Por qué la naturaleza sigue normas y modelos matemáticos?
- ¿Cuáles modelos matemáticos se encuentran en la naturaleza?

Luego hace un paralelo entre el número de segmentos que van apareciendo en cada transformación, la longitud de los segmentos agregados y el perímetro de la figura. Enseguida propone hallar su área, lo cual le permite al texto, explicar la infinitud del perímetro fractal y la finitud de su área.

Mas tarde realiza, unos ejemplos referentes a los números de Fibonacci y explica la definición de sucesión. Por último, en la sesión de *talleres*, pide al estudiante hallar una sucesión geométrica para calcular el número de triángulos, (del *triángulo de Sierpinski)* en cada iteración. Lamentable es el hecho que, no halla en alguna parte del texto mención alguna sobre el estudio de los *conjuntos de Julia o Mandelbrot*, a pesar que, en su caratula hay ilustrado uno de estos conjuntos.

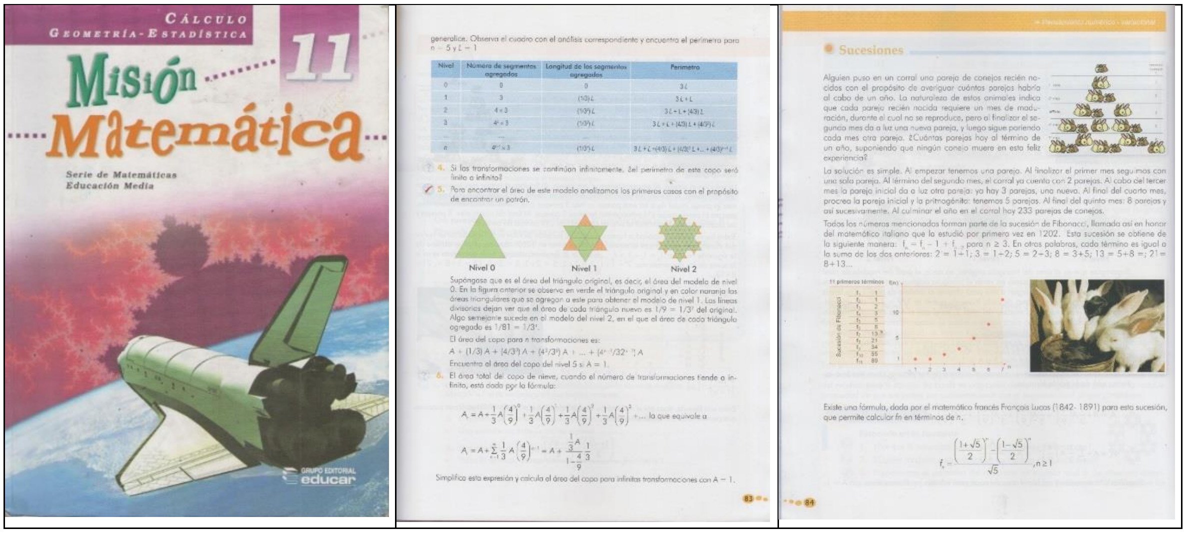


Ilustración 28: *Texto: Misión Matemática 11.*
Fuente*: (Vergara Saavedra, 2009).*

Con respecto la temática de los números complejos, operaciones y representación, tradicionalmente los maestros de matemáticas enseñan a sus estudiantes este tema como una característica de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. En el libro *Álgebra* de Baldor (1981) así lo presenta, y caracteriza los números imaginarios (complejos puros) como parte de un nuevo conjunto numérico, los números complejos. El texto *Matemáticas 9* para estudiantes de grado noveno (Melo R, 2007, pág. 178), va más allá y, presenta las operaciones y representaciones en el plano de los números complejos, pero hasta allí llega.

En general, en todos los textos revisados, ninguno hace referencia a temáticas de los fractales de Mandelbrot o Julia y los textos que trabajan con números complejos, ninguno referencia a las transformaciones, iteraciones, sucesiones o propiedades de similaridad importantes para su buena construcción y definición.

7.6. FASE II: CONCEPCIÓN Y ANALISIS *A PRIORI*

En esta sección se analizará los resultados de la prueba realizada a estudiantes del Centro Educativo Puerto Caldas (Anexo 2), donde se desea conocer *a priori* las habilidades, destrezas, dificultades que los estudiantes tienen de los conceptos de simetría (axial y rotacional) en imágenes dadas y cómo resuelven situaciones de traslación, rotación y homotecia. Por último, no solo se les pide reconocer que características de un fractal de Julia o Mandelbrot y sus autores, sino que propiedades simétricas o de semejanza contienen.

El ejercicio consta de 10 preguntas, de las cuales el estudiante no tiene que usar ningún procedimiento algorítmico para resolverlo, sus propios conocimientos geométricos pueden ayudarle a resolver los problemas. Se les permite consultar en el diccionario los términos desconocidos.

Por ejemplo, los ejercicios 1 y 2 versan sobre la tarea de identificar formas con simetría axial y rotacional. El ejercicio 3, tiene el objetivo de completar las imágenes usando la propiedad de la reflexión. Los ejercicios 4, 5, 6, y 7 intentan explotar las habilidades para rotar, dilatar y trasladar las figuras en el plano cartesiano. El ejercicio 9, trata de identificar si en los conocimientos previos de los estudiantes han escuchado de los principales representantes de la geometría fractal. Por último, el ejercicio 10 intenta que los estudiantes observen todas las características anteriores en una sola figura, y expliquen por qué.

Bajo estos parámetros, se aplica la tarea y se evalúan los procedimientos basados en la *escala Likert*. Se resumen los resultados de la siguiente tabla.

Estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Prom/Estud
1	4	1	4	4	4	3	4	4	1	1	3,0
2	3	1	4	3	4	4	4	3	2	1	2,9
3	2	1	4	1	1	1	1	1	1	1	1,4
4	3	3	3	4	2	3	4	3	2	3	3,0
5	2	2	4	4	4	3	3	2	2	1	2,7
6	3	1	2	2	1	4	4	2	1	1	2,1
Prom/Pregun.	2,8	1,5	3,5	3,0	2,7	3,0	3,3	2,5	1,5	1,3	

Tabla 6: *Puntaje para el pretest.* ***Fuente:*** *Elaboración Propia.*

Como se puede notar, los estudiantes tienen algunas habilidades para identificar figuras con simetría axial, pero no para la simetría rotacional, no comprendieron de qué se trata y cuantos ejes de simetría puede tener. Cuando se les coloca una forma fractal no logran identificar que ésta no tiene simetría axial como en la Ilustración 29.

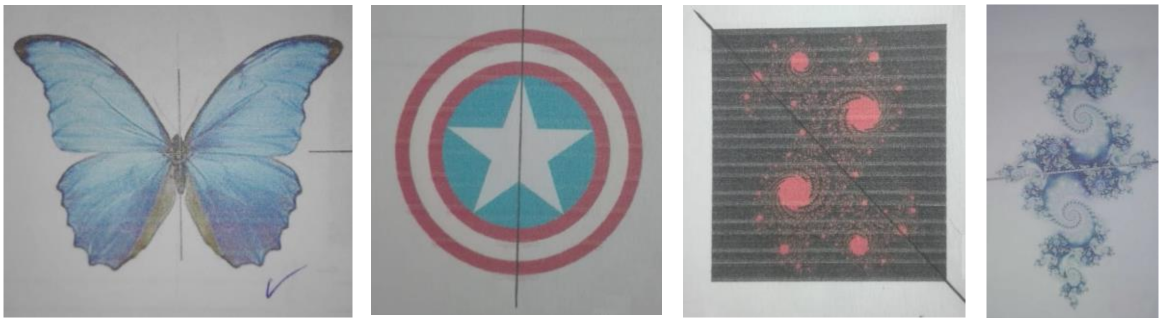


Ilustración 29: *Respuestas a la primera pregunta.*
Fuente: *Elaboración propia.*

En lo que respecta a las habilidades para completar las imágenes lo logran hacer de forma aceptable pero no completamente correcto. Algunas figuras, de las que a continuación se muestran, no logran acertar en la posición que llevarían si estuvieran frente a un espejo.

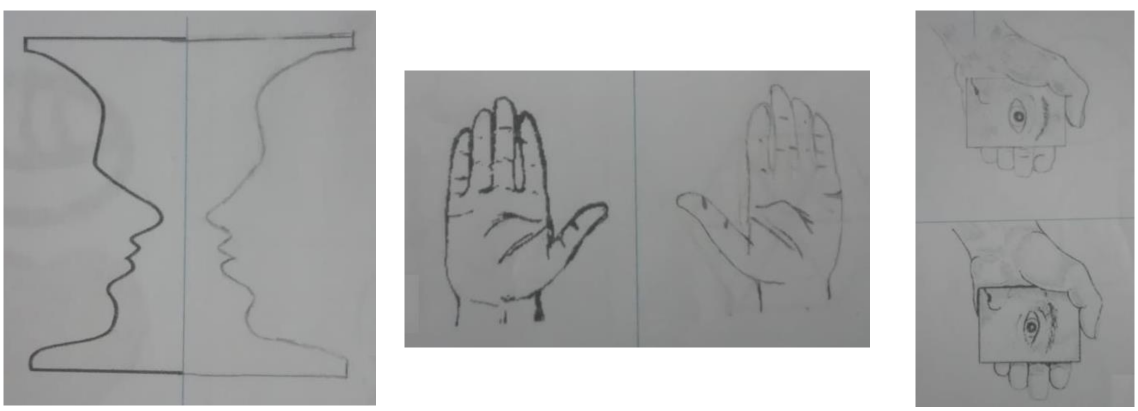


Ilustración 30: *Algunas respuestas de la pregunta 3.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Para las preguntas de dilatación, homotecia y traslación no todos logran un buen resultado y los más habilidosos no realizan tampoco un excelente trabajo. Les cuesta manejar la ubicación en el plano de las formas dadas y al pedirles que, por ejemplo, se realice un acercamiento a la figura, se les dificulta ubicar en los lugares precisos los puntos.

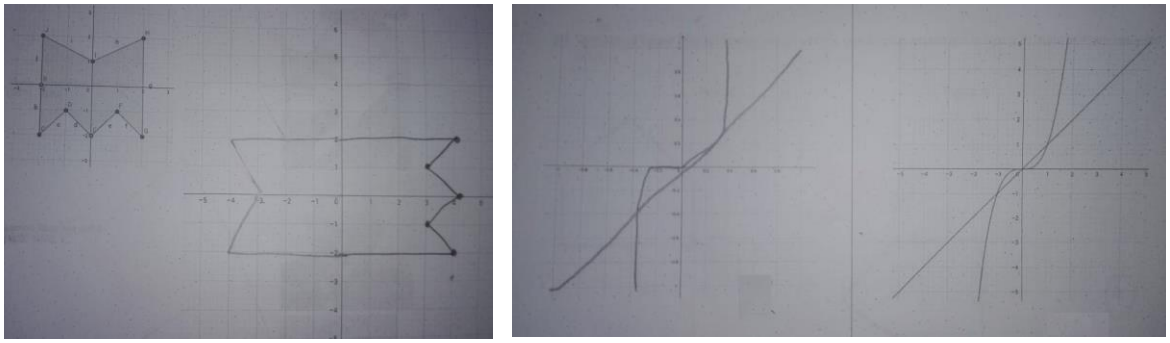


Ilustración 31: *Respuesta de algunos estudiantes a la pregunta 5 y 8.*

Fuente: *Elaboración propia.*

Se observa también, en la pregunta 9, que los estudiantes adivinan a la hora de relacionar las fotografías de los autores con sus nombres. Por último, los estudiantes no logran observar en la imagen del fractal de Mandelbrot ninguna tipo de característica de similaridad en su forma, excepto por algunos apelativos subjetivos como "bonito" o "raro" o "Tiene forma de corazón".

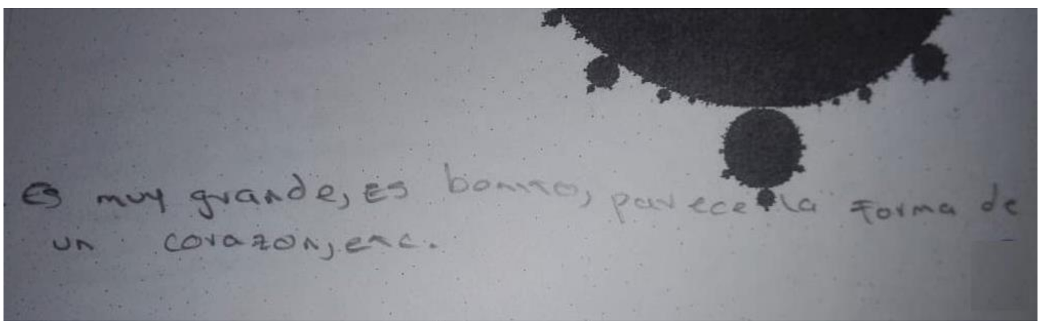


Ilustración 32: *Respuesta a la pregunta 10.*

Fuente: *Elaboración propia.*

Quizá la siguiente tabla aclare un poco la situación general.

Rango	# De estud.
[1,2)	1
[2,3)	3
[3,4)	2
[4,5)	0

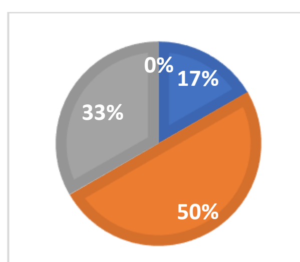


Tabla 7: *Promedio de estudiantes pretest.*

Fuente: *Elaboración propia.*

Según los promedios obtenidos, en la Tabla 7 se evidencia que sólo dos estudiantes superan la prueba de pretest en un rango no muy satisfactorio, entre 3 y 4 en la escala Likert, lo que equivale al 33,3% sobre los demás alumnos. El 66,6% no logran superar la prueba con éxito, por tanto, esto confirma lo que aducen las *pruebas saber* (Ilustración 1) proyectado en el capítulo “PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA”, de esta investigación. Los estudiantes de octavo y noveno necesitan un fortalecimiento de su pensamiento geométrico, ya que evidentemente no cuentan con los conocimientos básicos del pensamiento espacial. Por esto, se deben diseñar unas estrategias didácticas que fortalezcan estas habilidades con ayuda de algunos tópicos de la variable compleja y adentrarse en el mundo de la geometría fractal.

Estas sesiones se espera que los estudiantes desarrollen habilidades en el manejo de:

- Comprender el concepto de Número Complejo como par ordenado o vector, aquí llamado también Número Lateral (NL), para evitar el sesgo cognitivo “complicados”.
- Representar en el plano “cartesiano” los Números Laterales.
- Sumar y multiplicar los Números Laterales tanto algebraicamente como geométricamente.
- Transformar NL por medio de las operaciones de suma y producto de diferentes formas, llevándolos a los conceptos de rotación, ampliación y traslación de puntos en el plano.
- Realizar Iteraciones con NL buscando los criterios de convergencia.
- Descubrir los fractales de Julia por medio del dibujo de los NL que convergen en la iteración.
- Asignar propiedades geométricas y algebraicas a los conjuntos fractales desarrollados.

7.7. FASE III: EXPERIMENTACIÓN

En esta fase, se explican los propósitos de las sesiones a desarrollar y se establece el contrato didáctico. Luego se aplican las secuencias didácticas diseñadas en la fase *a priori* con los estudiantes con el propósito de desarrollar los objetivos de la investigación. Por último, se hace un análisis sobre los logros, habilidades y dificultades que tuvieron los estudiantes y el docente, por medio de las observaciones y datos cuantitativos recolectados en cada sesión.

Es necesario decir, que las sesiones están diseñadas para el trabajo con las TIC a través de los equipos de cómputo de la institución, que cuentan con software educativo accesible para los estudiantes como GeoGebra y Excel.

Estas ayudas se dan, con el fin de agilizar el trabajo con los cálculos y permiten una mayor comprensión de la dinámica de los Números Laterales en el plano, como dice James

Rodríguez (2017, pág. 71) *"es primordial la motivación con el ordenador (Mot-ord) cuando el estudiante muestra un alto interés por los ordenadores y encuentra que el aprendizaje con ellos es agradable, cuando reconoce que el ordenador le permite más libertad para la experimentación de nuevas ideas (Galbraith & Haines, 2000)"*

En primer lugar, estas secuencias se organizan en 6 sesiones de 3 horas cada una, bajo las siguientes temáticas y cumpliendo los objetivos esperados en la fase *a priori. Ver* Tabla 8.

Sesión 1	Introducción a los Números Laterales (complejos), suma y multiplicación de estos.
Sesión 2	Representación de los números Laterales en el plano. Método de suma y producto geométricamente.
Sesión 3	Transformación de un NL, de la forma: - $T(x,y) = (n,m) + (x,y)$ - $T(x,y) = (n,0)(x,y)$ - $T(x,y) = (0,m)(x,y)$ - $T(x,y) = (n,m)(x,y)$ - $T(x,y) = (x,y)(x,y)$
Sesión 4	Iteraciones de Números Laterales
Sesión 5	Fractales con iteraciones. Historia de los conjuntos de Julia-Mandelbrot. Simetría y Autosimilaridad
Sesión 6	Dimensión Fractal. Método de cajas

Tabla 8: *Temática de la secuencia didáctica.* ***Fuente:*** *Elaboración propia.*

Al realizar la situación didáctica y a-didácticas "no es necesario que para cada saber al que apunte la enseñanza hay que pasar obligatoriamente primero por una situación de *acción*, luego por una situación de *formulación* y luego por una situación de *validación*. Aunque esto pueda ser apropiado en algunos casos no se trata de una regla general. Por un lado, si bien una situación de validación supone la formulación de una aserción, y la formulación de una aserción supone una acción interiorizada, eso no significa que haya que pasar anteriormente por fases *a-didácticas* de *acción* y de *formulación*" (Rodríguez, 2017, pág. 72).

7.7.1. Sesión 1.

En esta sesión, se da la bienvenida a los Números Laterales como "pseudo-vectores", es decir, flechas en el plano que tienen longitud y dirección. Estos, además cuentan con las operaciones básicas de suma y multiplicación, que se pueden realizar algebraica o geométricamente en el plano. Se pretende que los estudiantes los puedan representar de forma cartesiana o angular con la ayuda de instrumentos como el transportado y regla.

Sesión 1	1	2	3	4	5	6	7	8	Prom
1	4	4	3	5	5	5	4	5	4,4
2	5	5	3	5	5	5	4	4	4,5
3	2	3	3	3	1	1	1	1	1,9
4	3	4	3	5	4	4	1	1	3,1
5	4	4	3	5	4	5	4	4	4,1
6	4	4	3	4	4	4	4	4	3,9
Prom / Preg	3,7	4,0	3,0	4,5	3,8	4,0	3,0	3,2	3,6

Tabla 9: *Consolidado sesión 1.* ***Fuente****: Elaboración propia.*

Pregunta 1: La suma por medio del **método del Paralelogramo** fue entendida fácilmente por los estudiantes, tanto es así, que muchos estudiantes afirmaban que no había necesidad de comprobarla algebraicamente.

Pregunta 2: Para la multiplicación, los alumnos lograron realizar de manera exitosa la multiplicación de dos números laterales, a través del algoritmo.

Pregunta 3: En esta pregunta se les pidió a los estudiantes que encontraran el algoritmo para la multiplicación de los NNLL[11] geométricamente, siguiendo los patrones del ángulo y tamaño de estos se esperaba que encontraran una relación, la cual no fue plasmada en ninguna de las respuestas de los estudiantes, pero si, más adelante, al reflexionar en grupo sobre esto, varios de los estudiantes sospecharon de esta relación, la hicieron pública a los compañeros pero no fue bien entendida en los demás, ya que la toma de las medidas de los ángulos en estos casos no habían sido muy bien hecha.

Pregunta 4: En esta actividad a-didáctica y grupal, tenía como objetivo que los estudiantes construyeran una calculadora en Excel para sumar y multiplicar números laterales, la cual realizaron de forma exitosa por el 100% de los estudiantes. Como fue una actividad casi grupal, los estudiantes más adelantados les explicaron a los otros como realizar el algoritmo con las celdas en Excel.

Pregunta 5: Esta actividad de procedimiento permitió comprobar la efectividad de la calculadora que cada uno habían creado. Sólo un alumno no pudo realizar completamente el procedimiento ya que se tenía que ir por circunstancias médicas.

[11] El singular para las siglas de Número Lateral es NL, el plural es NNLL.

Pregunta 6, 7 y 8: En esta actividad se pudo aclarar la operación de la multiplicación gráficamente (modo angular) y permitió a los estudiantes confirmar las hipótesis que habían hecho antes cuando pensaban en el procedimiento.

Rango	# De estud.
[1,2)	1
[2,3)	0
[3,4)	2
[4,5)	3

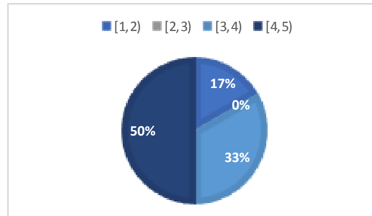


Tabla 10: *Promedio de estudiantes sesión 1.* ***Fuente:*** *Elaboración propia*

En general, en esta actividad fue bastante productivo, el 83,3% de los estudiantes terminaron la sesión con éxito, el promedio de grupo fue 3.6 en la escala Likert, superando el objetivo de la sesión.

7.7.2. Sesión 2.

En esta sesión se refuerza lo aprendido en la primera parte, la cual se realiza utilizando los tableros (**geoplanos**) y las bandas elásticas para su desarrollo. En la guía se muestra los geoplanos, así que los resultados que encuentren en los tableros deben ser registrados en las guías para su posterior análisis, de igual forma los ejercicios en GeoGebra.

Sesión 2	1	2	3.3	3.4	3.6	3.9	Prom
1	3	4	5	1	1	1	2,5
2	3	4	5	5	5	5	4,5
3	3	4	5	5	3	3	3,8
4	3	4	5	1	5	5	3,8
5	4	4	5	5	5	5	4,7
6	3	4	5	5	5	5	4,5
Prom / Preg	3,2	4,0	5,0	3,7	4,0	4,0	4,0

Tabla 11: *Consolidado sesión 2.* ***Fuente:*** *Elaboración propia.*

Pregunta 1 y 2: Se recordó un poco las reglas establecidas en la sesión anterior, acerca de cómo se suman y multiplica los NNLL de forma algebraica y geométrica en el geoplano, realizando varios ejercicios con ese método, el 100% de los alumnos lograron su objetivo; pero, se observó que se requiere más practica con el algoritmo del producto.

Ilustración 33: *Operaciones en el geoplano.*
Fuente: *Elaboración propia.*

<u>Pregunta 3:</u> Se trabajó desde el software GeoGebra, explorando en un primer momento, las funciones del programa, se observó que los estudiantes les agradó su contacto con la tecnología y comentaron sus perspectivas. Lograron aprender rápidamente a ubicar los puntos y a realizar figuras en el software, uniéndolos con segmentos de recta. También aprendieron a realizar rotaciones y reflexiones a las figuras, tanto proyectando los puntos intuitivamente como por medio del programa con las opciones *"rotación"* y *"reflexión".*

Rango	# De estud.	
[1,2)	0	0,0%
[2,3)	1	16,7%
[3,4)	2	33,3%
[4,5)	3	50,0%

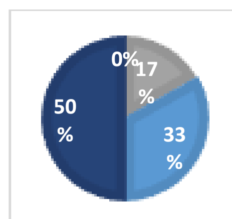


Tabla 12: *Resultados sesión 2.* ***Fuente:*** *Elaboración propia.*

Como se observa en la tabla 11 sólo una estudiante no logra completar la tarea sin embargo su promedio no baja de 2. Por otro lado, al observar la tabla 12, el rango de los estudiantes la primera escala tiene una frecuencia de cero. En general, el promedio grupal sube a cuatro (4) puntos en la escala Likert.

7.7.3. Sesión 3.

Para esta sesión se integra completamente el ordenador a la clase ya que éste permite realizar los cálculos más rápidamente.

Sesión 3	0.1	0.2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Prom
1	3	4	4	4	5	5	5	5	4	4	4	4,3
2	4	4	4	4	4	3	5	4	3	5	5	4,1
3	4	4	3	4	4	3	4	3	5	5	4	3,9
4	5	4	2	1	3	3	4	4	5	3	5	3,5
5	4	4	2	3	3	4	5	4	5	5	5	4,0
6	5	3	3	3	4	2	1	4	5	5	4	3,5
Prom / Preg	4,2	3,8	3,0	3,2	3,8	3,3	4,0	4,0	4,5	4,5	4,5	3,9

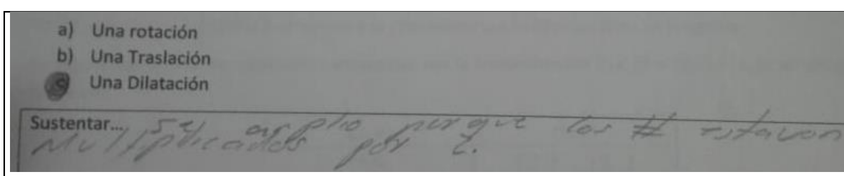
Tabla 13: *Consolidado sesión 3.* ***Fuente****: Elaboración propia.*

<u>Pregunta 0.1 y 0.2.</u> Se ideó una actividad a-didáctica individual con los estudiantes quienes tienen que descubrir que operación deben realizar para obtener un número lateral dado, además de su gráfica. Esto último se realizó en dos graficas diferentes, uno llamado *plano x-y* y la otra, *plano u-v*. Lo cual resulta ser un problema efectivo y bien desarrollado por el 83,3% de los estudiantes.

<u>Pregunta 1:</u> El reto fue descubrir cómo funciona las transformaciones y en este punto, los estudiantes les costó algo de trabajo descubrir cómo se resolvían. Algunos (33,3%) logran descubrir que las transformaciones con la operación suma se trasladan los números laterales, pero no todos lo logran.

<u>Pregunta 2:</u> En este, el 50% de los estudiantes ya se dan cuenta de los que suceden y algunos ni siquiera realizan los cálculos, simplemente los trasladan al punto necesario. La gran mayoría si logran descubrir de lo que se trata es de una traslación.

<u>Pregunta 3 y 4:</u> En este punto se comienzan a explicar y a clasificar los tipos de transformaciones con producto y para el caso de las de tipo $(n, 0) \cdot (x, y)$, los estudiantes (83,3%) comprenden perfectamente su dinámica algebraica y geométrica, se trata de una dilatación, el problema en algunos alumnos está en escribir bien su argumento.



"Se amplió porque los numeros estaban multiplicados por dos"

Ilustración 34: *Respuesta de un estudiante a la pregunta 3 de la sesión 3.*
Fuente*: Elaboración propia.*

<u>Pregunta 5 y 6:</u> Para las transformaciones de tipo $(0, m) \cdot (x, y)$, sólo con algunos cálculos en GeoGebra, lograron los alumnos descubrir de lo que se trataba la transformación: aparte de rotar 90 grados la imagen, también ampliaba ésta m veces. Los

estudiantes aprovecharon este procedimiento para realizar los cálculos de los demás ejercicios más rápidamente.

Pregunta 7 y 8: Los estudiantes simplemente pidieron el consentimiento del docente para que diera el visto bueno de los cálculos algebraicos para usar la transformación de la forma $(m, n)(x, y) + (a, b) = (mx - ny + a\ , my + nx + b)$, el resto del proceso, ellos lo realizaron en la hoja de cálculo de GeoGebra y no tener que realizar los cálculos a lápiz y papel. Fue cuestión de tiempo que los alumnos más adelantados explicaran a los demás el procedimiento más eficiente y lograr terminar más rápido el trabajo entre todos.

Pregunta 9: Para la transformación de la forma $T(x, y) = (x, y)^2 + (m, n)$ se ayudaron también de que en GeoGebra existe la opción de mover con el cursor los puntos (a transformar) a voluntad por todo el *plano x-y*, lo que implica que automáticamente el punto transformado en el plano u-v también se moviera (ya que están como enlazados por programación). Así, es solo cuestión de que los estudiantes dispusieran en su hoja de cálculo los puntos para obtener los resultados requeridos.

Rango	# De estud.	
[1,2)	0	0,0%
[2,3)	0	0,0%
[3,4)	4	66,7%
[4,5)	2	33,3%

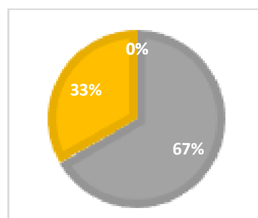


Tabla 14: *Resultados sesión 3.* ***Fuente:*** *Elaboración propia.*

Por tanto, se observa que, aunque el promedio general de los estudiantes disminuyo un poco comparado con la sesión anterior, ningún estudiante realizó un mal procedimiento en su trabajo, sobre todo porque, en las últimas preguntas la actividad se desarrolló con ayuda del programa GeoGebra, así, esta sesión fue más productiva que nunca. Al parecer, también se puede decir que el afán de los estudiantes de terminar rápidamente el procedimiento los motivó a encontrar métodos efectivos que les permitieran encontrar más rápidamente las respuestas, permitiendo descubrir en ellos talentos no antes detectados.

7.7.4. Sesión 4

En esta sesión se busca llevar a los estudiantes por el mundo de los patrones. Para esto se plantea una **situación a-didáctica** con una pequeña historia acerca de un matemático que debe detectar, con ayuda de un radar poderoso, una serie de **bombas** (puntos coordenados) en el **mapa** (plano complejo) que funciona por medio la iteración de números complejos a través de la transformación $z^2 + c$. Esta historia, encamina al alumno en un mundo donde tiene que seguir unas pistas en forma de patrones que lo llevará a la solución del conflicto ayudando al protagonista con sus conocimientos. Estos puntos (bombas), son imposibles de encontrar si el alumno no usa herramientas aprendidas en GeoGebra para generar una serie inmensa de iteraciones de números laterales y encontrar patrones de convergencia. Para esto, el estudiante tendrá una formación previa sobre iteración en esta sesión y él mismo debe encontrar la forma de programar las celdas y graficar los puntos según la guía lo va orientando. Después de la aplicación de la guía se detecta.

Sesión 4	1	2	3	4	5	6	Prom
1	5	4	4	3	4	4	4,0
2	5	5	4	3	4	4	4,2
3	4	3	3	3	3	4	3,3
4	5	4	3	4	3	4	3,8
5	4	5	4	3	3	4	3,8
6	5	3	4	3	3	3	3,5
Prom / Preg	4,7	4,0	3,7	3,2	3,3	3,8	3,8

Tabla 15: *Consolidado sesión 4.* ***Fuente:*** *Elaboración propia.*

<u>Pregunta 1:</u> La actividad buscaba que los estudiantes se familiarizasen con las iteraciones de las funciones. El 100% de los estudiantes respondieron correctamente y lograron comprender el proceso, primero, a lápiz y papel. A la pregunta: ¿Hasta dónde podría realizarse este proceso que en adelante llamaremos **iteración**? Todos respondieron que se podía hacer infinitamente, lo cual es correcto.

<u>Pregunta 2:</u> Se intentó que los estudiantes ejercitaran este nuevo concepto con algunos ejercicios interesantes de iteración, teniendo además que encontrar el patrón, debían hallar la ecuación de transformación, y explicar cada una. El 66% de los alumnos lograron solucionarlo completamente, solo dos estudiantes tuvieron dificultad por cuestiones de tiempo.

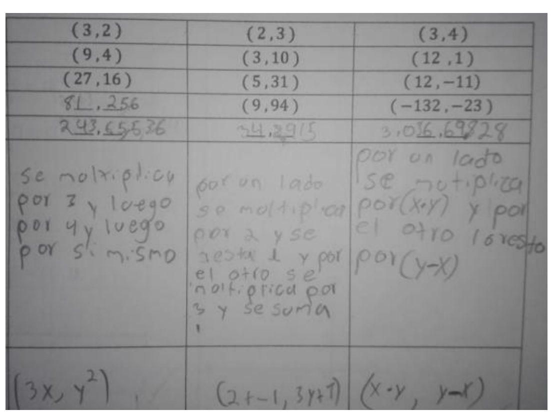


Ilustración 35*: Respuesta de un estudiante a la pregunta 2, sesión 4.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Pregunta 3: Según las situaciones anteriores ¿qué es para ti una Iteración? El 66.6% de los estudiantes lograron responder correctamente, el 33,3% les faltó un mejor uso de las palabras para describirlo, aunque tenían la idea.

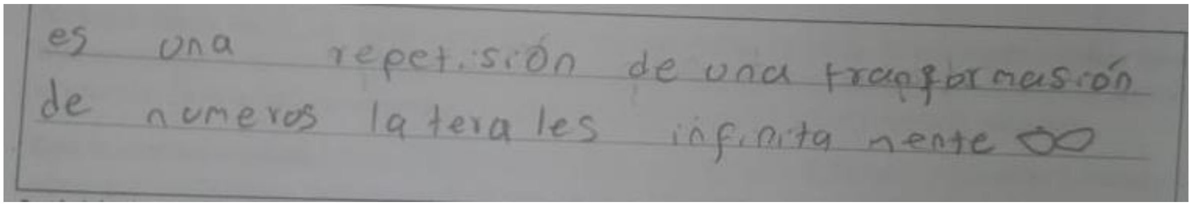

es una repetisión de una tranformasión
de numeros la tera les infinita mente ∞

Ilustración 36: *Respuesta a la pregunta 3 sesión 4.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Pregunta 4: el 100% de los estudiantes comprendieron como programar las celdas de una hoja de cálculo para realizar las iteraciones. A la pregunta ¿por qué si mueves el punto A (Punto inicial) a otra parte, los demás puntos se mueven también? Todos los estudiantes respondieron correctamente: debido a que el punto A es la base para todos los demás puntos y si cambia de posición, cambian también los demás que son sus iteraciones.

Pregunta 5: Al leer la historia e intentar encontrar los puntos que convergen en el plano, el 100% de los estudiantes logran hallar algunos puntos, pero solo dos estudiantes legraron descubrir que todos esos puntos forman un círculo los demás pensaron que tenia forma de rombo.

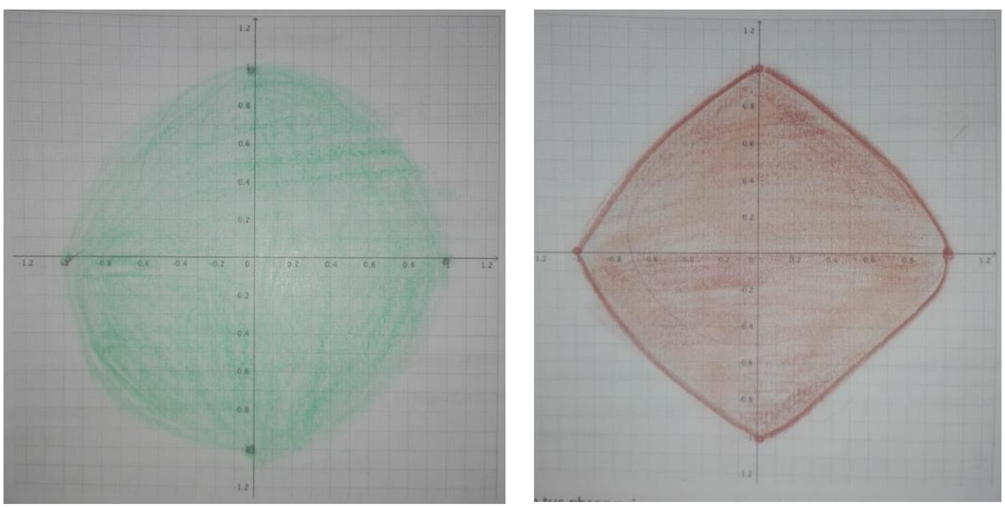


Ilustración 37: *Respuesta a la pregunta 6 sesión 4.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Pregunta 6: La guía de trabajo señala como condicionar el color de los puntos cuando las iteraciones convergen, el 83.3%de los estudiantes logró encontrar el circulo relleno de puntos que convergen el 12% (1 estudiante) logra encontrarlos, pero piensa que la figura en cuadrada. Ver Ilustración 37.

Al final de esta sesión los estudiantes muestran una actitud más de compromiso con esta investigación, tanto es así, que el autor recibe información del profesor de sistemas, que afirma que algunos estudiantes se dedican a replicar en Excel lo aprendido y no hacen los deberes de su materia. Volviendo al tema, se observó que el número de los estudiantes que siguen las indicaciones del docente y se esfuerzan por realizarlas correctamente no se ha reducido. El acompañamiento entre los estudiantes y el docente ha sido muy positivo.

Rango	# De estud.	
[1,2)	0	0,0%
[2,3)	0	0,0%
[3,4)	4	66,7%
[4,5)	2	33,3%

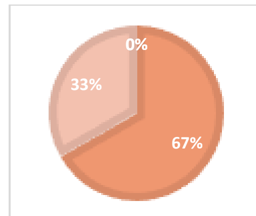
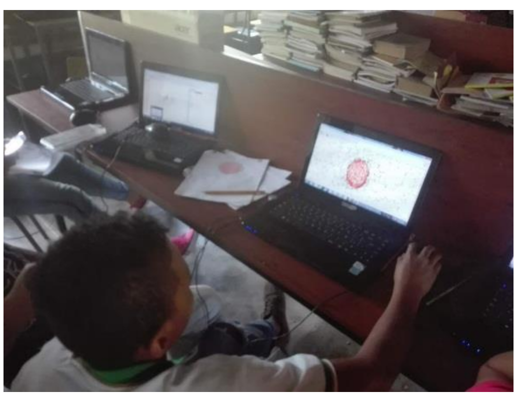


Tabla 16: *Resultado sesión 4.* ***Fuente:*** *Elaboración propia*

7.7.5. Sesión 5

En esta sesión, se descubren los fractales a través de la situación a-didáctica que los ubica en la continuación del cuento y los problemas de iteración con puntos en GeoGebra (Anexo 6). En este, se guía los estudiantes para recorrer parte del plano y con la función "rastro" de GeoGebra permite ubicar los puntos convergentes del plano, punto por punto, pudiendo dibujar todo el mapa de los puntos atrapados y formar su primera figura fractal.



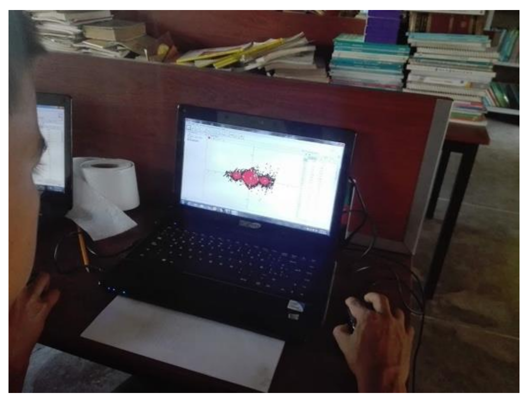


Ilustración 38: *Construcción del conjunto de Julia con GeoGebra.*
Fuente*: Elaboración propia.*

<u>Pregunta 1</u>: Al pedir que dibujen la figura formada por los puntos atrapados el 100% de los estudiantes dibujaron correctamente la figura, aunque no muy bien detallada.

Por cuestiones de tiempo, no se les pudo enseñar toda la programación requerida en GeoGebra para que el este mapee completamente los conjuntos detalladamente y en menos tiempo, no es el objetivo de esta investigación. El docente les presenta un proyecto ya programado, en GeoGebra, que permite realizar lo mismo, pero más rápido. Es cuestión que el estudiante solo haga los ajustes a los parámetros iniciales que desee, por medio de deslizadores con una configuración determinada. Por ejemplo, cambiando la posición de la constante c, el programa dibuja el *conjunto de Julia* correspondiente. Además, realiza acercamientos, dibuja con el rango que se desee y aumenta a voluntad la resolución de la imagen al incrementar la densidad de puntos por unidad, etc. Véase, las figuras de las Ilustración 12, Ilustración 13, Ilustración 14, Ilustración 16 e Ilustración 17 hechas con este programa.

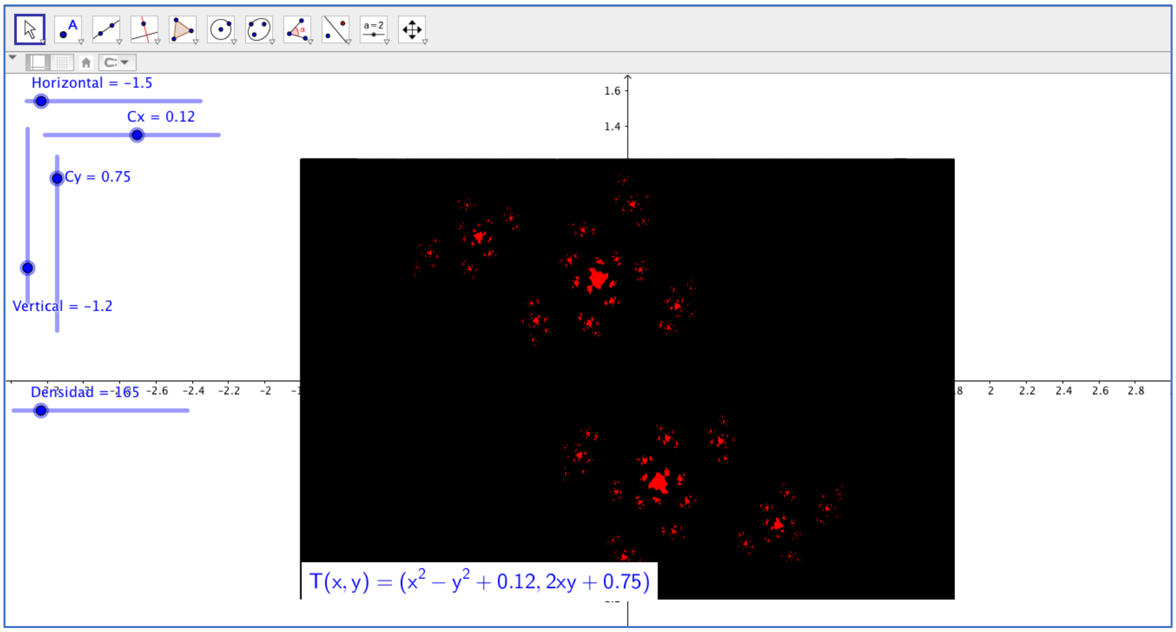


Ilustración 39: *Construcción de un fractal en el programa de GeoGebra.*
Fuente: *Elaboración propia en GeoGebra.*

Pregunta 2: Los estudiantes experimentan diferentes tipos de figuras con el programa GeoGebra variando la constante c de la transformación $z^2 + c$. Al preguntar por qué algunas figuras forman un solo cuerpo (conexas) y otras son de forma polvorosa (no-conexas), el 83,3% de los estudiantes responden correctamente, aduciendo que entre más se aleje c del origen los conjuntos de Julia se van volviendo cada vez más “polvorosas”

Pregunta 3: Al pedirles a los estudiantes que marquen en el “mapa de señales S” (plano Π_c) los puntos que generan figuras compactas todos los estudiantes realizaron correctamente el mapa, aunque estos también marcaron en el mapa puntos equivocados, pero en general lo realizaron muy bien. Generando más de 100 fractales con el programa.

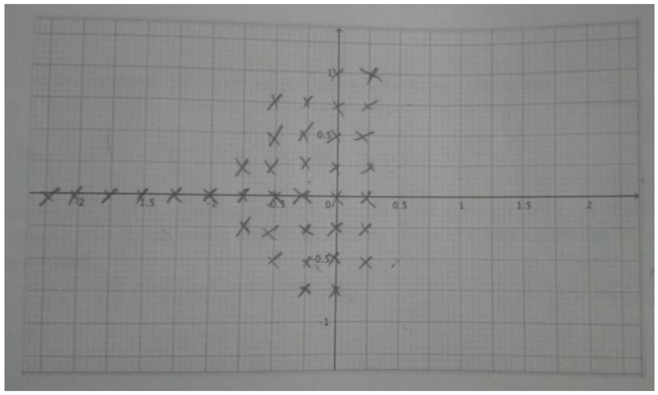


Ilustración 40: *Marcación de los puntos c que generan conjuntos conexos en el plano.*
Fuente: *Elaboración propia.*

En este punto, la guía realiza un contexto histórico estos *conjuntos*, se les cuenta de los grandes personajes que los descubrieron, Julia y Fatou, sus fotografías, que aportaron a su construcción y se hace un diálogo entre los estudiantes sobre los aportes de cada uno.

Pregunta 4: Después de hacer algunas de estas figuras en GeoGebra se les deja elegir una figura y se hace las preguntas si es posible dibujar a lápiz y papel el contorno exacto de esta figura? A lo que correctamente todos contestaron que no. Enseguida se les pregunta si en el conjunto $J_{(-1,0)}$ la figura es de una sola pieza. Lo que 66% dijeron que si, y el 33% creían que sí, pero no estaban seguros. Por último, se les realiza una pregunta, si eran capaces de identificar dónde estaba los dos ejes de reflexión del conjunto, a lo que el 66% respondieron correctamente y el 33% no supo sino encontrar uno.

Pregunta 5: Se les pide a los estudiantes completar las imágenes que les hace falta en una pieza y deben ser completadas con ayuda de alguna de las siguientes propiedades: rotación, traslación, homotecia y autosimilaridad, la cual tienen que explicar cada una. El 66% de los estudiantes dibujaron correctamente y explican cada una de las imágenes por las propiedades de reflexión, rotación, homotecia y autosimilaridad, pero el 33.3% no logran explica de forma eficaz cada propiedad, pero si realizaron los dibujos correctamente.

Pregunta 6: Por último, se realiza un ejercicio de rompecabezas (Anexo 7). Con una serie de 117 fichas, marcadas todas con un número lateral, que indica la ubicación de esa ficha en el plano. Las fichas están pintadas con dibujos impresos de cada uno de los *conjuntos de Julia* descubiertos por los estudiantes usando GeoGebra (pregunta 3). La marca, del número lateral de cada dicha, referencia el número de la constante c que la genera.

Los estudiantes lograron ubicar todas las fichas ordenadamente y pudieron observar todos los conjuntos de Julia al mismo tiempo. Por las indicaciones del maestro los alumnos conjeturaron que, al parecer, existe un conjunto más grande que los contiene, el conjunto Mandelbrot. Cuando dicen esto último, el maestro saca una ficha más que tenía en sus manos y les pregunta ¿Acaso será este conjunto? Todos los estudiantes se sorprendieron y uno de ellos exclama "lo sabía". Ver Ilustración 41.

Ilustración 41: *Elaboración del rompecabezas de conjunto de Julia.*
Fuente: *Elaboración propia.*

A lo que el maestro les pregunta, "¿Este conjunto tendrá las mismas características que descubrimos en los conjuntos de Julia?". "Aparentemente si", dijeron.

Sesión 5	1	2	3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	Prom
1	4	4	5	4	4	5	5	4	4	4	5	4,4
2	4	2	4	4	3	4	3	4	4	4	4	3,6
3	4	4	4	4	3	3	4	3	4	3	4	3,6
4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3,5
5	4	3	4	4	4	3	4	3	4	4	3	3,6
6	4	4	4	4	4	4	4	3	3	4	5	3,9
Prom / Preg	4,0	3,5	4,2	4,0	3,7	3,8	3,8	3,3	3,7	3,7	4,0	3,8

Tabla 17: *Consolidado sesión 5**. Fuente:*** *Elaboración propia.*

A continuación, el docente les muestra un nuevo programa en GeoGebra, con las funciones del programa anterior, donde enseña este nuevo conjunto. Los estudiantes comienzan a observar si tienen estas propiedades aumentando sus características. A lo que el docente, por último, les dice "les presento al conjunto de Mandelbrot mencionado antes en la lectura". Por último, se les explica cómo se genera este conjunto y se deja una consulta sobre ¿qué es un fractal? Y en qué dimensión se encuentra.

Como se observa en la gráfica, Tabla 18 , la mayoría de los estudiantes si están entendiendo las secuencias didácticas que se han diseñado, comprendieron, las propiedades de semejanza en el uso y estudio de los *conjuntos de Julia* y *Mandelbrot*.

Rango	# De estud.
[1,2)	0
[2,3)	0
[3,4)	5
[4,5)	1

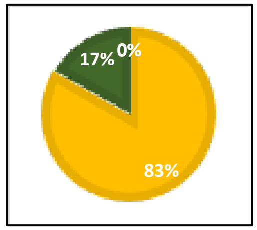


Tabla 18: *Resultados sesión 5.* ***Fuente:*** *Elaboración propia.*

7.7.6. Sesión 6

En esta última sesión, se trata de responder que clase de figuras son los *conjuntos de Julia* y *Mandelbrot* y a qué dimensión pertenecen. En sí, se trata de averiguar que es dimensión y cómo se mide.

Los estudiantes investigaron y descubrieron que los *conjuntos de Julia-Mandelbrot* pertenecen a las figuras llamadas fractales, e incluso profundizaron un poco y se dieron cuenta que había muchos más conjuntos de Mandelbrot que también se podían construir con GeoGebra.

Aclarando la consulta, se les hizo saber a los estudiantes que, para que sea una figura sea considerada un fractal debe no solo cumplir la condición de ser autosimilar, sino que debe tener una dimensión no entera y de esto se trata la presente sesión.

Esta comienza con una explicación corta de lo que se entiende por dimensión topológica y dimensión fractal y aclarada en la lectura. En ella, se explica que para descubrir la dimensión de una figura tan irregular como los conjuntos de Julia es necesario usar un método llamado "conteo de Cajas". Este método trata, primero, en dividir completamente la imagen en formas regulares, dígase cuadrados, luego se cuentan cuantos cuadrados tocan el conjunto de Julia. Segundo, se subdividir estos cuadrados, en cuadrados más pequeños, dígase a la mitad, y se vuelve a realizar el proceso de conteo de los cuadrados que tocan el fractal. Por último, se reemplazar estos datos en la fórmula, ecuación (*12*) de la página 48 de este texto, y así se obtiene su dimensión fractal.

Pregunta 1: El 100% de los estudiantes logran realizar el proceso completo con éxito, hallando la dimensión de conjunto de Mandelbrot de forma muy aproximada.

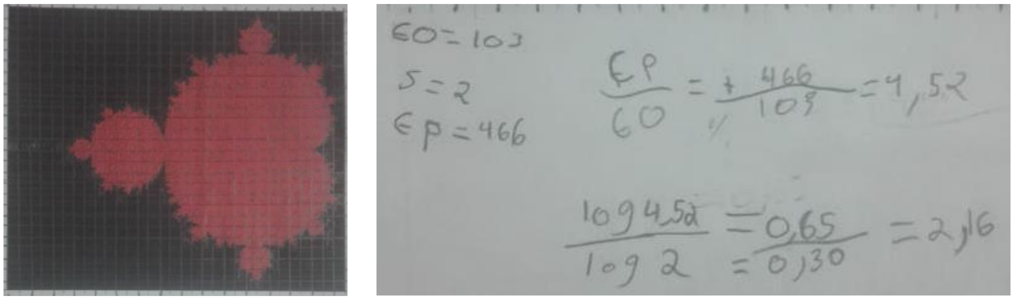
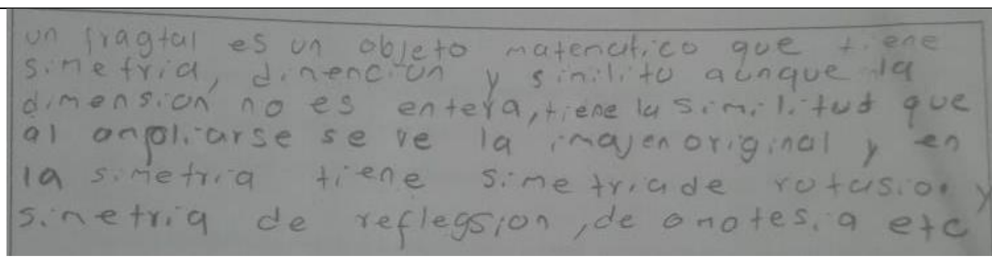


Ilustración 42: *Método de conteo de cajas y cálculo de dimensión fractal.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Pregunta 2: El 100% de los estudiantes respondieron correctamente que los elementos de un fractal son generalmente: Simetría, autosimilaridad y dimensión no entera.

Pregunta 3: El 100% de los alumnos respondieron correctamente a la pregunta ¿Puedes definir un fractal? En la siguiente imagen es una muestra de ello.


un fractal es un objeto matematico que tiene simetria, dimencion y similitud aunque la dimension no es entera, tiene la similitud que al anpliarse se ve la imajen original y en la simetria tiene simetria de rotasion y simetria de reflegsion, de omotesia etc

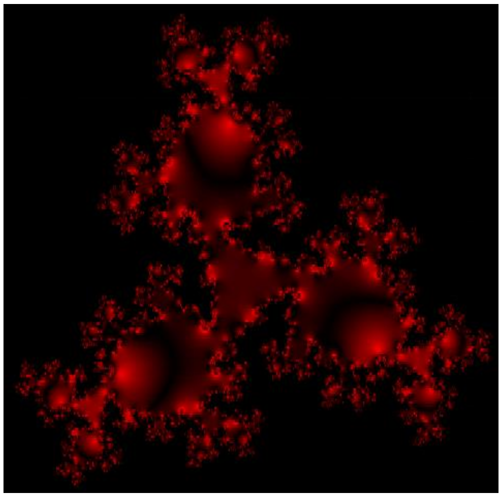
"Un fractal es un objeto matemático que tiene simetría, dimensión y similitud aunque la dimensión no es entera, tiene la (autosimilitud) que al (acercarse) se vuelve a ver la imagen original, y en la simetría tiene simetria de rotación, de reflexión, de homotesia, etc."

Ilustración 43: *Respuesta de un estudiante a la pregunta qué es un fractal.*
Fuente*: Elaboración propia.*

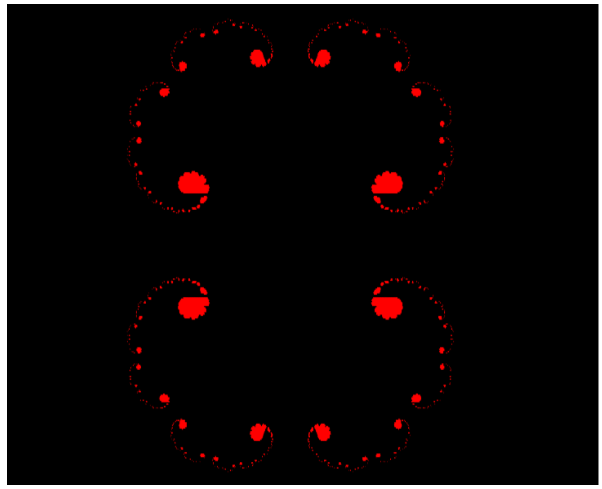
Pregunta 4: A la tarea de buscar un fractal usando GeoGebra que no se halla hecho antes en clase, el 100% de los estudiantes lograron descubrirlos.

Tres estudiantes trabajaron en los conjuntos de Julia, generando decenas de fractales que antes no se habían hecho, de los favoritos por ellos mismos se escogieron la imagen b, c y d de la Ilustración 44, realizados por los estudiantes 2,3 y 4 respectivamente.

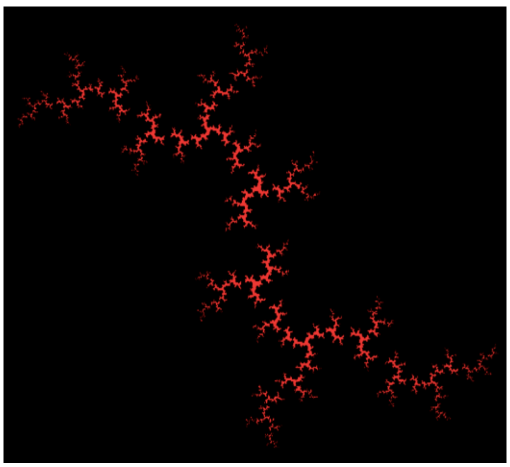
Los demás estudiantes realizaron los conjuntos de las figuras a, e, y f, los cuales son en esencia, conjuntos de Mandelbrot modificados.



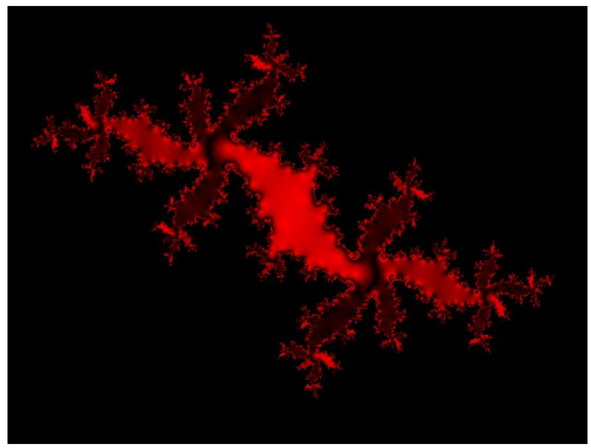
a) Mandelbrot para $z^3 + c$



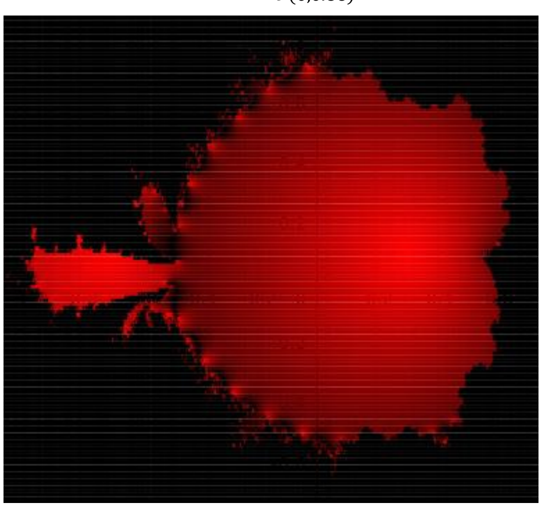
b) $J_{(0.33,0)}$



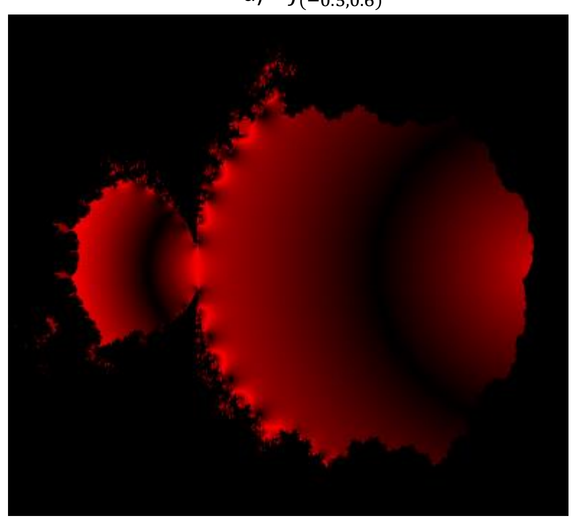
c) $J_{(0,0.86)}$



d) $J_{(-0.5,0.6)}$



e) Mandelbrot para $z^2 + c + (-0.3, -0.1)$



f) Mandelbrot para $z^2 + z + c$

Ilustración 44: *Conjuntos fractales realizado por los estudiantes.*

Fuente: *Elaboración en GeoGebra.*

Sesión 6	1	2	3	4	Prom
1	4	4	4	5	4,3
2	4	5	5	5	4,8
3	4	3	3	4	3,5
4	4	4	5	5	4,5
5	4	5	4	5	4,5
6	4	4	4	5	4,3
Prom / Preg	4,0	4,2	4,2	4,8	4,3

Tabla 19: *Consolidado sesión 6.* ***Fuente:*** *Elaboración propia.*

Para concluir, esta sesión fue de las más productivas para los estudiantes ya que pudieron construir una definición de fractal, descubierta por ellos mismos a través de las características y conceptos trabajados.

Rango	# De estud.
[1,2)	0
[2,3)	0
[3,4)	1
[4,5)	5

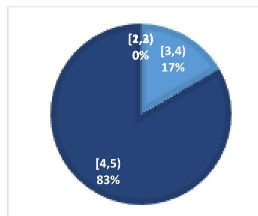


Tabla 20*: Resultados sesión 5.* ***Fuente****: Elaboración propia.*

Se observa en las gráficas que los estudiantes tuvieron una mejora significativa con respecto al promedio de grupo, de todas las sesiones. Al dialogar con los estudiantes, manifestaron que las preguntas de la sesión fueron muy interesantes y gracias a las TIC pudieron resolver las situaciones más rápidamente, incluso les quedó tiempo para pensar en otras formas de solucionar los problema planteados.

7.8. FASE IV: ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN.

En esta última fase de la *ingeniería didáctica*, el trabajo se apoya en el conjunto de datos recolectados de la fase experimentación. El estudio se fundamenta en un *análisis de contenido* para su posterior comparación entre los dos test, de la etapa *a priori* (Anexo 2) y la *a posteriori* (Anexo 4).

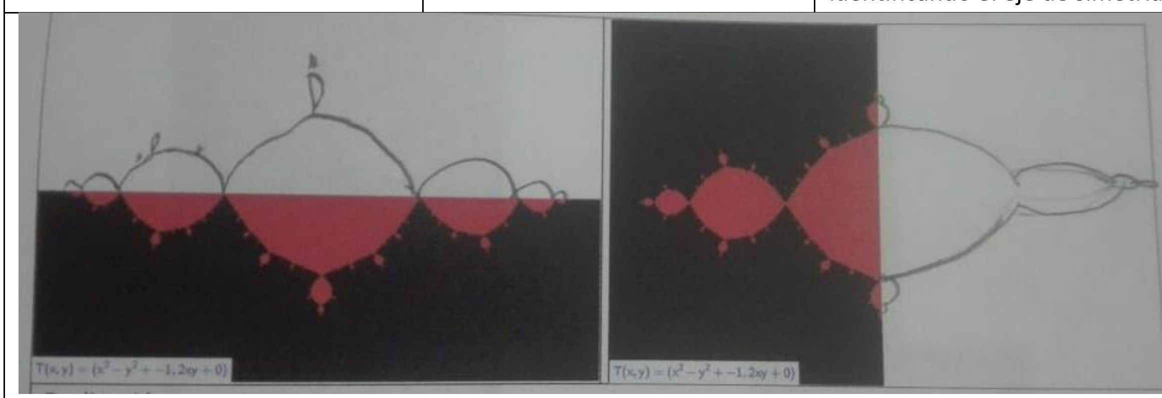
A continuación, se establece una correspondencia de las categorías de los dos test, a priori y a posteriori, con las preguntas de los mismos. Las imágenes a continuación son de elaboración propia.

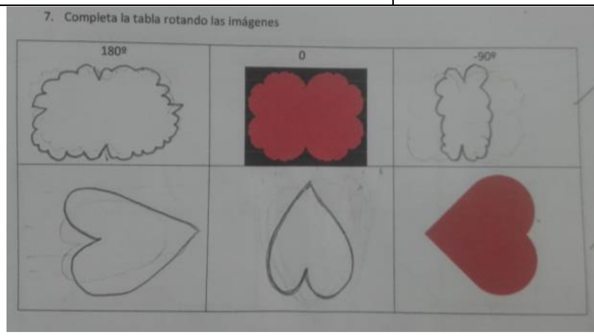
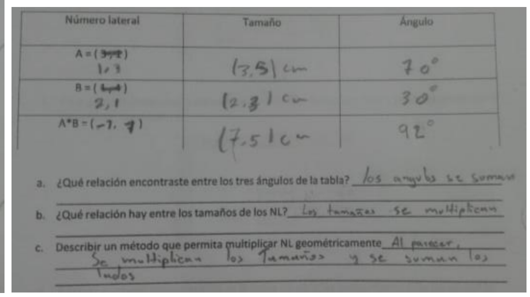
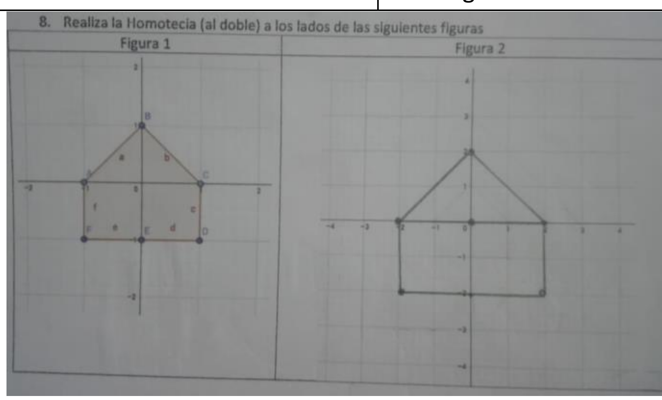
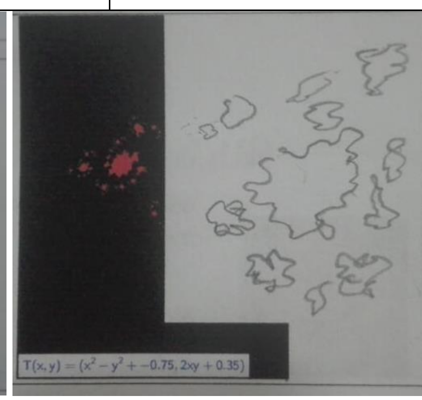
Categoría	Prueba *a priori*	Prueba *a posteriori*
Simetría axial	1. ¿Qué entiendes por simetría? 2. ¿Qué objetos has visto en la vida real que tenga algún tipo de simetría? (dibújalos) 4. Traza con una línea cada una de las siguientes figuras de tal que forma que muestres la simétricas Axial 7. Complete la figura.	1. ¿Qué entiendes por simetría? 2.7. ¿Qué objetos has visto en la vida real que tenga algún tipo de simetría? 4. De las figuras encuentra las que tiene simetría axial y traza con lápiz su eje. 6. Completa las imágenes según su simetría axial
Simetría Rotacional	2. Explique el significado de rotación. 5. Señala cuál de las siguientes imágenes tiene simetría radial y explica por qué. 9. Rote las siguientes imágenes 90 y 180 grados 12. Rota 90 grados la figura con respecto al origen. 13. Rota la figura 90 grados.	2.3. ¿Qué entiendes por Rotación? 4. De las siguientes imágenes describa la clase de simetría que tienen 7. Rotar las siguientes figuras 90 y 180 grados. 10. Medir el tamaño y el ángulo de los NL y describe un método geométrico para multiplicarlos
Homotecia	2. Explique el significado de homotecia. 10. Acercamiento de la figura de la función haciendo ampliación. 11. Realiza la homotecia de los lados de la siguiente figura al doble.	2.1. ¿Qué entiendes por Dilatación? 2.2. ¿Qué entiendes por Homotecia? 8. Realiza la homotecia (al doble)de la siguiente figura
Traslación	2. Explique el significado de traslación. 12. Traslada la figura 2 de tal forma que uno de sus vértices quede en el origen	9. Realiza la transformación de la siguiente figura con la transformación…
Dimensión	2. Explique el significado de dimensión. 17. Observa la siguiente imagen (conjunto de M) y anota sus características.	2.5. ¿Qué entiendes por Dimensión? 12.Observa la siguiente figura encuentra sus características
Autosimilaridad	2. Explique el significado de Autosimilitud.	2.4. ¿Qué entiende por Autosimilitud? 12. Observa la siguiente figura encuentra sus características

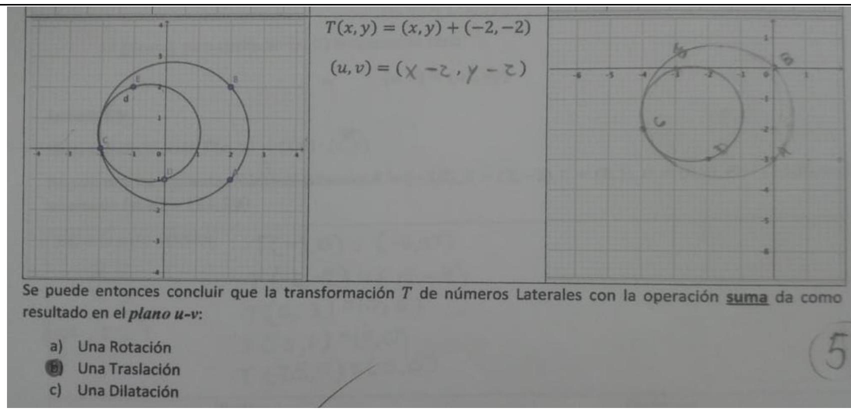
	17. Observa la siguiente imagen (conjunto de M) y anota sus características.	
Fractal	15. ¿sabes quiénes fueron los siguientes personajes? (historia) 17. Observa la siguiente imagen (conjunto de M) y anota sus características.	2.6. ¿Qué entiendes por Fractal? 12. Observa la siguiente figura (Conjunto M) encuentra sus características

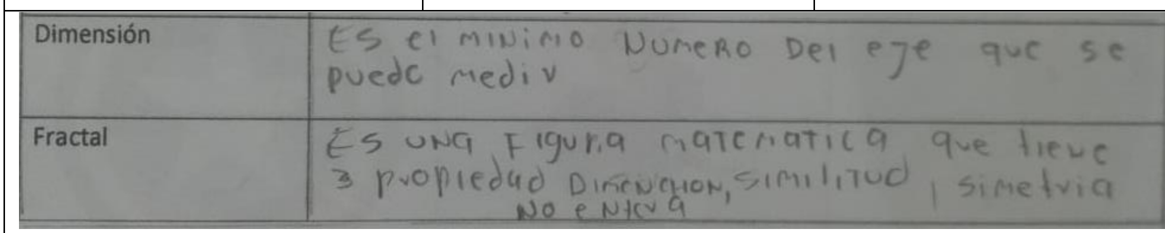
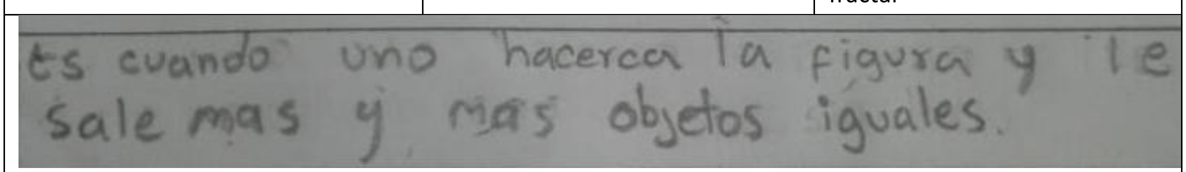
Tabla 21: *Categorización de preguntas de pretest y postest.* ***Fuente****: Elaboración propia.*

Ahora se establece el análisis de estas categorías con la respuesta general de los estudiantes.

Categoría	**Respuesta *a priori***	**Respuesta prueba *a posteriori***
Simetría axial	Los estudiantes respondieron que no sabían que era simetría, ni mucho menos axial, las figuras las completaban, pero no con reflexión.	Los estudiantes reconocieron la simetría axial como una de las características de la similaridad. Las figuras las completaron correctamente identificando el eje de simetría
		
Simetría de rotación	Los jóvenes identificaron esta característica con el hecho simple de movimiento de girar. Al identificar figuras con estas características no fueron capaces de señalarlas y justificarlas correctamente. Con respecto al giro de objetos o números laterales les costó mucho trabajo ya que no tienen muy bien interiorizado las direcciones de los ángulos.	Los estudiantes entendieron que esta característica se refería a la posibilidad de poder girar un objeto usando un punto de referencia como los números laterales giran con respecto al origen. En cuanto a las figuras eligieron correctamente las que tenían esta característica. Los problemas de multiplicación de Números Laterales les permitieron interiorizar como giraban las

		figuras con respecto a un punto determinado.
 		
Homotecia	Los alumnos no tenían conocimiento de la palabra. Al hacer las ampliaciones de funciones en el plano, estas no conservaban sus características más lógicas	Los estudiantes entienden el concepto de homotecia como dilatación de las figuras. Al aplicar esta a problemas gráficos, éstos son resueltos con éxito.
 		
Simetría de Traslación	Los estudiantes no identificaron la traslación como característica de la simetría. El traslado de figuras en el plano fue realizado correctamente para problemas donde solo se requería este ejercicio, pero cuando además se les pedía ampliación, a traslación quedaba de lado	El concepto queda claro que es una característica de la simetría para los estudiantes. Al pedírseles que traslade figuras al mismo tiempo que realiza una homotecia o gira, se deja un lado la traslación.

<table>
<tr><td colspan="3">

Se puede entonces concluir que la transformación T de números Laterales con la operación **suma** da como resultado en el *plano u-v*:
a) Una Rotación
b) Una Traslación
c) Una Dilatación</td></tr>
<tr><td>Dimensión</td><td>Los estudiantes no identifican el concepto de dimensión con ninguna figura.</td><td>Los alumnos relacionan la dimensión con el número de ejes en el plano en los que puede ubicarse una figura. Además, proponen la dimensión como característica de los fractales pero que sea no entera.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
Dimensión: Es el minimo numero del eje que se puede medir
Fractal: Es una figura matematica que tiene 3 propiedad Dimencion, similitud, simetria no entera</td></tr>
<tr><td>Autosimilaridad</td><td>El estudiante no conoce el concepto ni su uso</td><td>El estudiante conoce su función como parte fundamental de la geometría fractal</td></tr>
<tr><td colspan="3">
es cuando uno hacerca la figura y le sale mas y mas objetos iguales.</td></tr>
<tr><td>Fractal</td><td>El estudiante no es capaz de relacionar el termino con algún significado o uso</td><td>El estudiante define y crea fractales a partir de características como, dimensión y similitud. Comprende perfectamente que el conjunto M es una forma fractal con todas sus características.
Recuerdan perfectamente los autores más sobresalientes de la historia de los fractales.</td></tr>
</table>

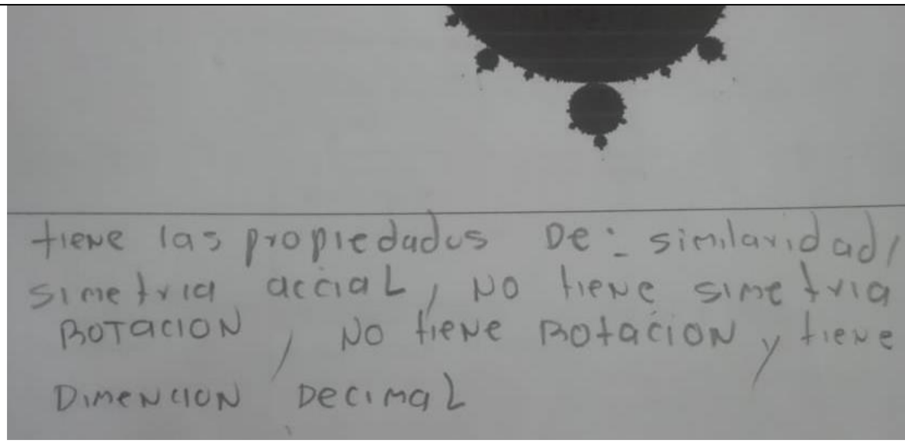


Tabla 22: *Análisis de respuesta de los estudiantes por categoría.* ***Fuente:*** *Elaboración propia.*

En este punto, se evidencia que los estudiantes se apropiaron del concepto de fractal, y reconocen sus características principales como autosimilaridad y dimensión no entera, con ayuda de los números laterales y el uso de las TIC.

8. CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

A continuación, se exponen las conclusiones, recomendaciones y cuestiones abiertas

8.1. Conclusiones

1. Se identificaron, mediante el análisis de datos (encuesta y pretest), algunas problemáticas en el aprendizaje de la geometría por parte de los estudiantes de octavo y noveno del Centro Educativo Puerto Caldas donde, en primer lugar, no tenían claro algunos conceptos básicos del pensamiento espacial como la simetría, la semejanza o la dimensión, y en segundo lugar, tampoco lograron identificar, completar o caracterizar los objetos e imágenes por medio de rotación, homotecia y traslación, a pesar que estos procesos si eran familiares para los estudiantes.

2. Se diseñó con éxito una estrategia de aprendizaje para introducir el concepto de número complejo como "**número lateral**", representado en el plano cartesiano como **par ordenado** o "pseudo vector" con (magnitud y dirección) y sus operaciones básicas, fueron desarrolladas con acierto por parte de los estudiante en el uso simultáneo del **geoplano** y la comprobación algebraica de las operaciones por componentes.

3. Se desarrollaron los conceptos de transformación lineal y cuadrática, por medio de las operaciones básicas de puntos en el plano.

4. Se clasifican, por parte de los estudiantes, los criterios de convergencia mediante el uso de hojas de cálculo en GeoGebra que les permitió computar, graficar y pintar los resultados de las iteraciones.

5. Se generó, clasificó y analizó más de 100 conjuntos de Julia, por parte de los estudiantes, utilizando las propiedades de conexidad y similaridad; y se construyó a través de un juego de ordenación de tarjetas (de conjuntos de Julia) el conjunto de Mandelbrot. Así mismo, por medio de GeoGebra y un poco de programación guiada por el docente, los estudiantes lograron realizar acercamientos en los detalles de la frontera de los conjuntos generados para descubrir con asombro y emoción la propiedad de la autosimilaridad de estas figuras.

6. Se logro, que los estudiantes diseñaran y analizaran nuevas figuras fractales creadas a partir de otras transformaciones, reconociendo sus propiedades fractales de similaridad, autosimilaridad y dimensión no entera.

7. Los alumnos logran calcular, con ayuda del método de cajas (*Box-Counting*), la dimensión del *conjunto de Mandelbrot*. Comparando estos resultados con un algoritmo en Excel proporcionado por el docente, los resultados de algunos jóvenes son definitivamente muy cercanos.

8.2. Recomendaciones

Desarrollado este trabajo de investigación se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones

1. El estudio de la geometría fractal en este proyecto puede ser trabajado y asimilado por los estudiantes en cualquier nivel de educación primaria o secundaria de cualquier otro establecimiento educativo de la región, teniendo en cuenta claro está, sus necesidades y niveles de desarrollo cognitivos. En los primeros niveles el aprendizaje de cualquier sistema geométrico es claro que el modelo de Van Hiele es indispensable. Sin embargo, desde la perspectiva de la variable compleja se recomienda que se trabajen los fractales con los estudiantes de nivel de secundaria.

2. El trabajo con números complejos y demás tópicos de la variable compleja permitió explorar un poco el mundo de las series y sucesiones, las cuales pueden ser exploradas por estudiantes de cualquier nivel de secundaria conduciéndolos a comprender mejor diferentes fenómenos reales como la economía o el crecimiento de poblaciones que difícilmente se podrían representar y comprender gráficamente con los números reales.

3. Algunas de las características como la similaridad, con sus diferentes tipos de simetrías, pueden ser trabajados desde la perspectiva del modelo de Van Hiele, puesto que es una herramienta que permite desarrollar el pensamiento espacial y geométrico en los estudiantes. Además, de ser una importante estrategia para la enseñanza de semejanza y proporciones.

4. Las herramientas tecnológicas de la información y la comunicación TIC son una importante estrategia para trabajar la enseñanza de temáticas relacionadas con el pensamiento espacial o geométrico y en general, del pensamiento matemático. Para

esto, se considera que, no es solo cuestión de tener las herramientas en la institución educativa (como computadores y tabletas) sino que el maestro también tenga una buena formación en programación para que la dinámica del contenido, planeación y ejecución tenga un mejor alcance en los estudiantes y los motive a desarrollar sus propias herramientas y mejorar su pensamiento lógico a través de lenguajes básicos.

8.3. Cuestiones abiertas.

1. ¿Será viable implementar este proyecto en el plan de estudios del Centro Educativo Puerto Caldas con el fin de trabajar más en el concepto de fractal?

2. ¿Es pertinente desarrollar este proyecto en estudiantes universitarios para mejorar los niveles de comprensión de los fractales y los tópicos de la variable compleja?

3. ¿Será posible que este proyecto se vuelva transversal en todas las áreas de enseñanza de la institución?

9. REFERENCIAS BOBLIOGRÁFIAS

Arredondo, L. L. (2016). *El Sentido del Número Complejo desde sus Raíces Imaginarias. .* Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Atencia, V. (2014). *Fractales Matemáticos. (Trabajo de grado).* Barcelona: Universidad de Barcelona.

Aurentz, J. (22 de Septiembre de 2017). *Polinomios para construir edificios seguros*. Obtenido de El Pais (España): https://elpais.com/elpais/2017/09/22/ciencia/1506069453_894253.html

Baldor, A. (1981). *Álgebra.* Madrid: Cultural Centroamericana S. A.

Borjón Nieto, J. J. (2002). *Caos, Orden y Desorden en el sistema monetario y financiero internacional.* Mexico: Plaza y Valdes.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Dudactical Situations in Mathematics.*

Calderón, D. I. (2005). *Articulo: La ingenieríadidáctica como metodología de investigación del discurso en el aula.* Universidad del Valle .

Calderon, D. I. (2005). *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas. (Tesis doctoral).* Cali: Universidad del Valle.

Cardona G., L. A. (2017). *Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para el desarrollo geométrico en estudiantes de la media básica de C. E. Bachillerato en Bienestar Rural sede Ciato en el municipio de Pueblo Rico mediante elementos de la naturaleza.* Universidad Tecnológica de Pereira.

Castro, F. (1994). *Geometría fractal en el Bachillerato: (Monografía).*

Centro Educativo Puerto Caldas. (2017). *Plan de estudios de Matemáticas.* Pereira.

Churchill, R. V. (1992). *Variable Compleja y Aplicaciones.* España: McGraw-Hill.

CIO, F. (20 de Julio de 2018). *¿CUÁNTO MIDE LA COSTA DE GRAN BRETAÑA?* Obtenido de fractalescio.wordpress.com: https://fractalescio.wordpress.com/2014/11/12/cuanto-mide-la-costa-de-gran-bretana/

Cobos, J. (2002). *Introducción a la geometría fractal. Básica Primaria. (Monografía).* Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Daza, C. (1999). *Geometría fractal en el Bachillerato. Acercamiento por Sistemas Dinámicos. (Monografía).* Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

DeLorto, R. (2013). *Fractal dimension and Julia sets (tesis de maestría).* Eastern Washington University, Cheney.

Devaney, R. L. (1994). *Complex Dynamical Systems: The Mathematics Behind the Computer Graphics. Vol. 39.* American Mathematics Society.

Douady, R. &. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. La ingeniería didáctica y la evolución con el conocimiento.*

Du Sautoy, M. (2012). *Los misterios de los números. La odisea de las matemáticas en la vida cotidiana.* Barceona: Acantilado.

Echavarría, H. D. (2016). Clasificación de los diseños mixtos en las Ciencias Sociales y aplicación al análisis de tres informes de investigación. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social*, 8-26.

Estrada, W. (2004). *Geometría Fractal: Conceptos y Procedimientos para la construcción de Fractales.* Bogotá: Magisterio.

Euclides59. (20 de Agosto de 2018). Obtenido de Katsushika Hokusai (1760-1849), La gran ola de Kanagawa: https://euclides59.wordpress.com/2012/02/26/katsushika-hokusai-1760-1849-la-gran-ola-de-kanagawa/

García, E. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de algunos tópicos de la variable compleja en la media vocacional en la Institución Educativa Empresarial del municipio de Dosquebradas.* Universidad Tecnológica de Pereira.

González, J. R. (2007). *Introducción a la Teoría de las Funciones de una Variable Compleja.* Universidad Tecnológica de Pereira.

Icfes. (2 de 4 de 2018). *Publicación de resultados Saber 3º, 5º y9º*. Obtenido de Icfes, mejor saber: http://www.icfes.gov.co/instituciones-educativas-y-secretarias/pruebas-saber-3-5-y-9/resultados-pruebas-saber-3-5-y-9/informacion-general

Jaramillo Ferro, J. A. (junio de 2018). *Diseño de una estrategia metodológica basada en MICEA para la enseñanza de la geometría fractal mediante aulas virtuales*. Obtenido de Actualidades Pedagógicas: Doi: http://dx.doi.org/10.19052/ap.3385

Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature.* San Francisco: Freeman.

Márquez Vera, J. A. (2017). *Enseñanza de la dimensión fractal usando el principio de auto semejanza con Geogebra a estudiantes de la básica media en la I. E. Nuestra Señora de Guadalupe de Dosquebradas Rda.* Universidad Tecnológica de Pereira.

Melo R, C. E. (2007). *Matemáticas 9.* Bogotá: Futuro Editorial.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

MEN. (1999). *Lineaamientos curriculares: Nuevas tecnologías y currículo en Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

MEN. (2002). *Estándares Básicos de Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguage, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Revolución Educativa. Colombia Aprende.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje. Volúmen 2.* Bogotá: Panamericana.

MEN. (8 de Junio de 2018). *mineducación.gov.co*. Obtenido de Porcentaje de Matricula con acceso a internet: https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-348154.html

Moreno, L. (1998). *De la educación matemática a matemática educativa. Memorias Decima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Bogotá: RELME 12.

Orozco, M. (2000). *El análisis de treas: cómo utilizarlo en la enseñanza de la matemática en preescolar.* Cali: Centro de Investigaciónes en Psicología, Cognición y Cultura, Universidad del Valle.

Pereira Pérez, Z. (Junio 2011). Los diseños de método mixto en la investigación en educación: Una experiencia concreta. *Revista Electrónica Educare Vol. XV, N° 1*, 15-29.

Pérez Medina, C. (2007). *Transformaciones Lineales Afines y Fractales. .* Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Pérez, N. P. (2005). *Talleres sobre Geometría Fractal aplicados a grupos de estudiantes básica secundaria y media.* Bucaramanga.

Rivera Henao, E. &. (2011). Geometría Fractal y Transformada de Fourier. *Scientia et Technica*, 48(XVI), 269-274.

Rodríguez, J. (2017). *Una didáctica para el Aprendizaje del Concepto de Infinito mediado por las TIC en grado Décimo de la Instiución Educativa Nuestra Señora del Rosario del Municipio de Belén de Umbría.* Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Romero V., E. (2018). *Proyecto de grado: Analisis de la Comprensión del Concepto de Probbilidad y su Aplicación Geométrica, Mediante una Ingeniería Didáctica.* Universidad Tecnológica de Pereira.

Rubiano, G. N. (2009). *Iteración y fractales (con Mathemática).* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Sabogal, S. &. (2011). *Una introducción a la geometría fractal.* Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

Sampieri, R. H. (2014). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw Hill.

Suazo, M. (2015). *El uso de Scilab como una estrategia alternativa a la enseñanza de la variable compleja: Un estudio en la UNAH-VS.* Universidad Pedagógica Nacional, San Petro Sula, Venezuela.

Talanquer, V. (2002). *Fractus, Fracta, Fractal. Fractales de laberintos y esoejos.* Fondo de cultura económica.

Vergara Saavedra, G. (2009). *Misión Matemáticas 11.* Bogotá: Educar Editores .

Zapata, F. N. (2014). *La geometría de las plantas: Una experiencia de modelación matemática en el pensamiento espacial y sistemas geométricos.* Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

11. ANEXOS

11.1. Anexo 1: Encuesta a estudiantes.

Tema para trabajar:

Definición de simetría, similitud, fractal.

Objetivos

- Realizar un diagnóstico acerca de cómo entienden los conceptos básicos de la geometría fractal.
- Analizar como los estudiantes aducen los conceptos.
- Determinar si los estudiantes han visto es su vida académica estos conceptos.

Nombre: _______________________________________ Fecha: __________________

Explica con tus propias palabras que entiendes por cada uno de los siguientes conceptos e ilustra con un dibujo:

Simetría.
Dilatación.
Homotecia.
Rotación.

Dimensión.
Autosimilaridad.
Describe algunas clases.
¿Has estudiado algunos de estos conceptos con anterioridad? ¿cuáles?

11.2. Anexo 2: Pretest

Tema a trabajar

- Simetría (Axial, Rotacional)
- Similaridad (Rotación, Homotecia, Traslación)
- Fractales (Julia, Mandelbrot)

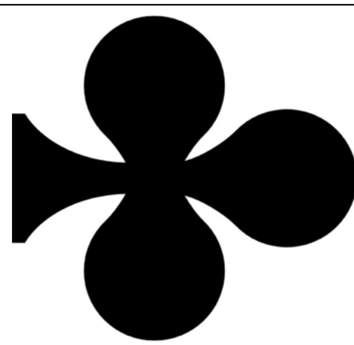
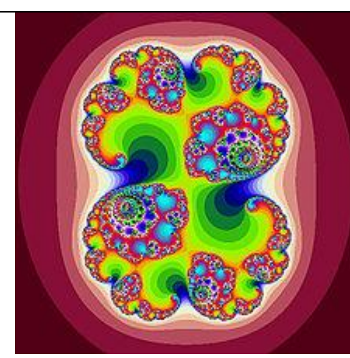
Objetivos

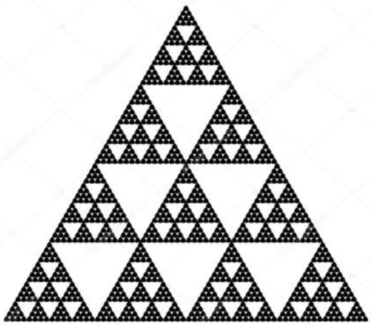
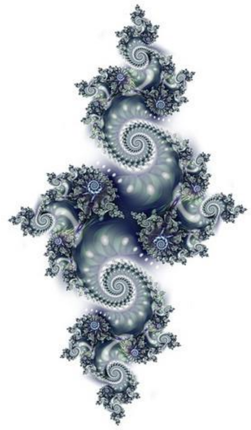
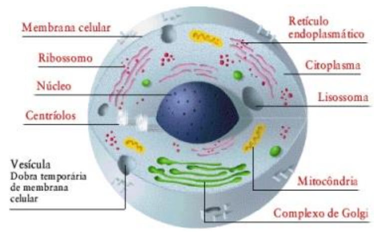
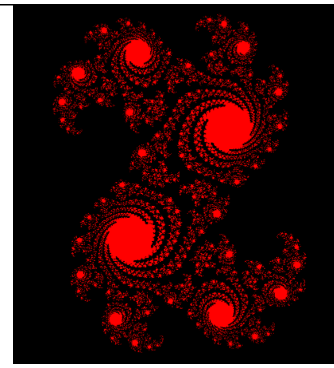
- Determinar qué tan observadores son los estudiantes, referente a encontrar imágenes con simetría Axial y Rotacional
- Conocer que tanta habilidad tienen los estudiantes para completar figuras usando la simetría de espejo.
- Analizar que tanto conocen los estudiantes de los autores más representativos de la geometría fractal.
- Analizar si los estudiantes pueden encontrar las características más resaltantes de un fractal de Julia o Mandelbrot.

Es de aclarar que todas las imágenes de las preguntas 1,2,3,4,5,9 y 10 fueron importadas de la web, tales como Wikipedia y otras fuentes. El resto de las imágenes de los fueron realizadas en GeoGebra por el autor.

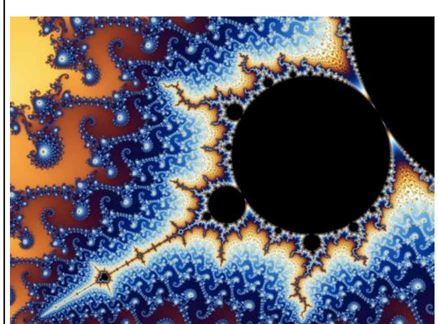
Nombre: ______________________________________ Fecha: _________________

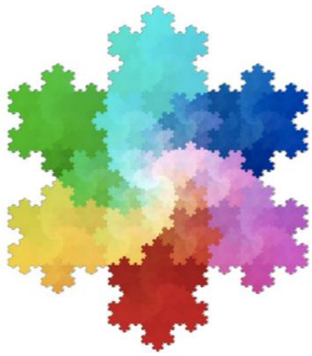
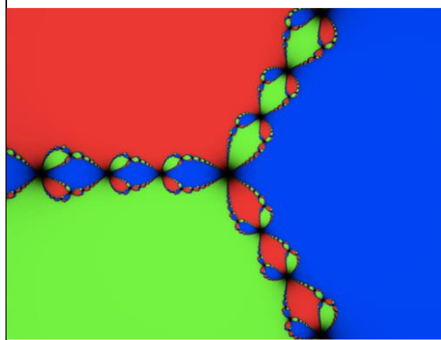
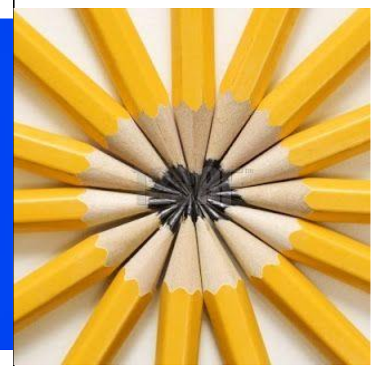
1. Traza una línea en cada una de las siguientes figuras de tal manera que divida la figura en dos partes iguales (Simetría Axial)

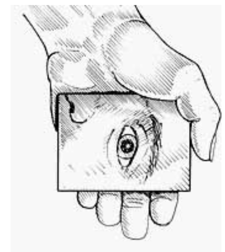
		
		

2. Señala cuál de las siguientes imágenes presenta una simetría de rotación o radial y explica en el recuadro inferior por qué.

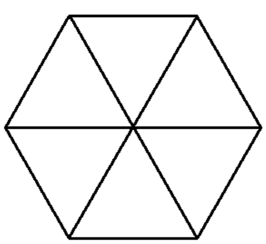
		

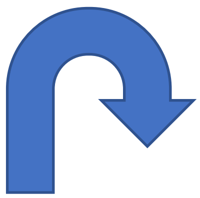
		

3. De las siguientes imágenes, Imagina que en la línea adyacente a las imágenes se sitúa un espejo, ¿cómo crees que se verá su reflejo en el lado opuesto?

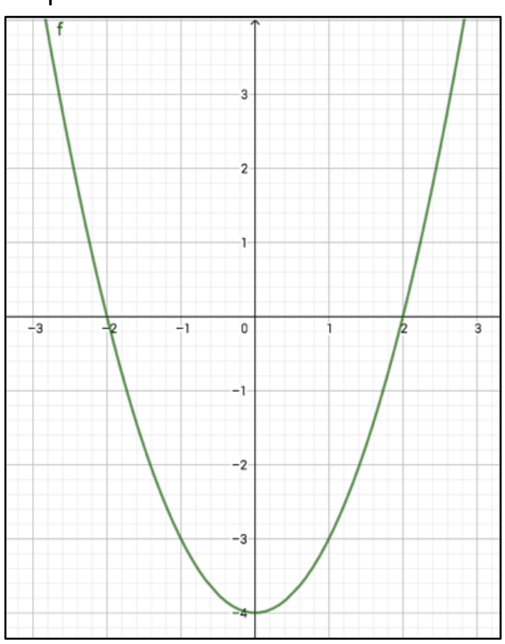


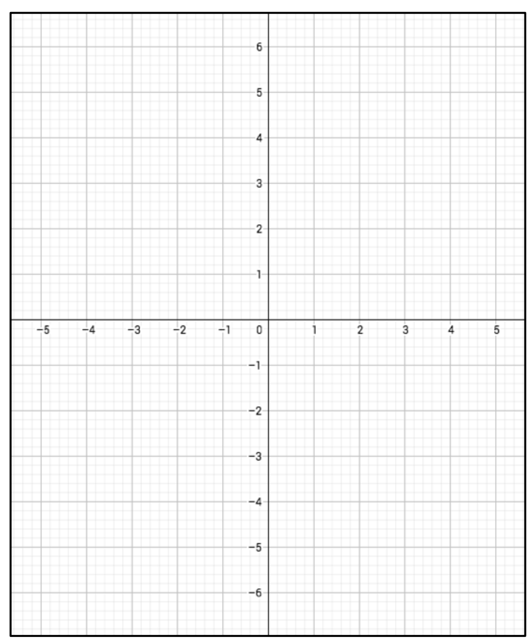
4. De las siguientes imágenes tomar cada una, según se indique.

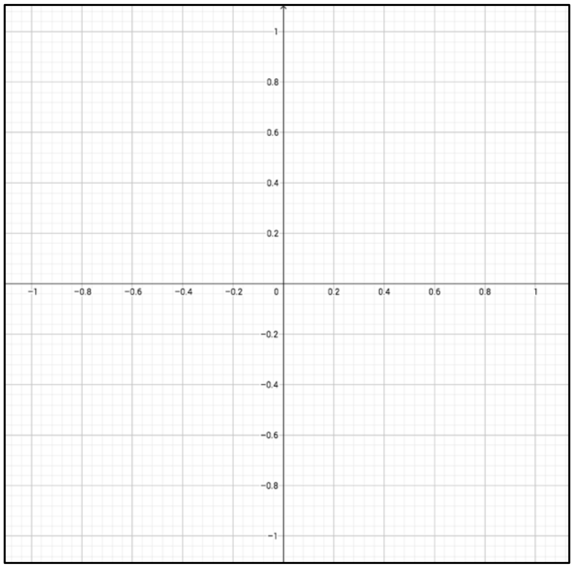
	90º	180º
		
		
		

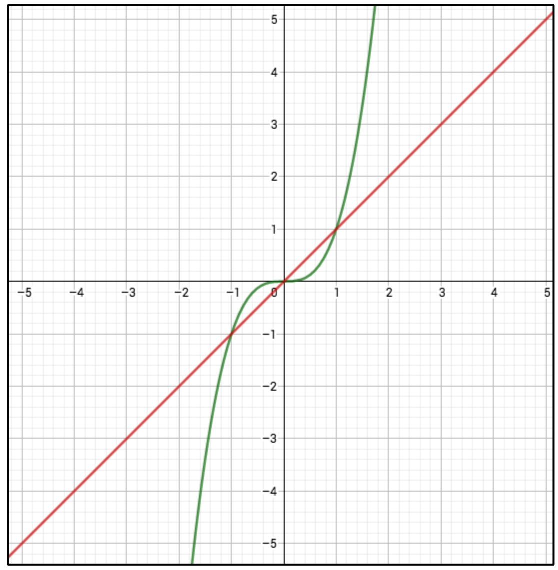


5. Correspondencia visual. Dibuja la gráfica de la función a continuación, de tal forma que no se altere la ubicación de sus puntos.









6. Realiza la Homotecia de la siguiente figura, distanciando sus vértices al doble de su con respecto al origen

Figura 1

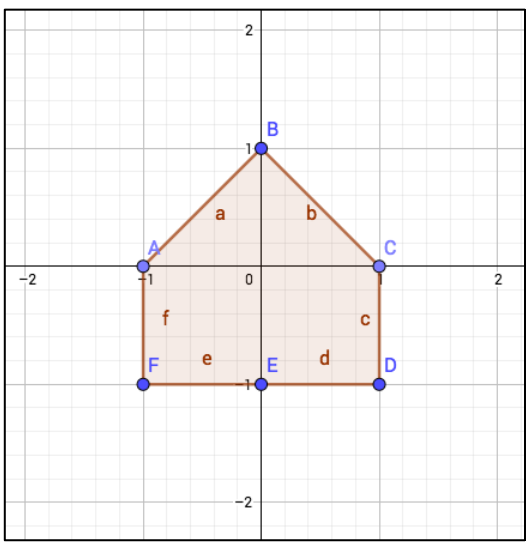
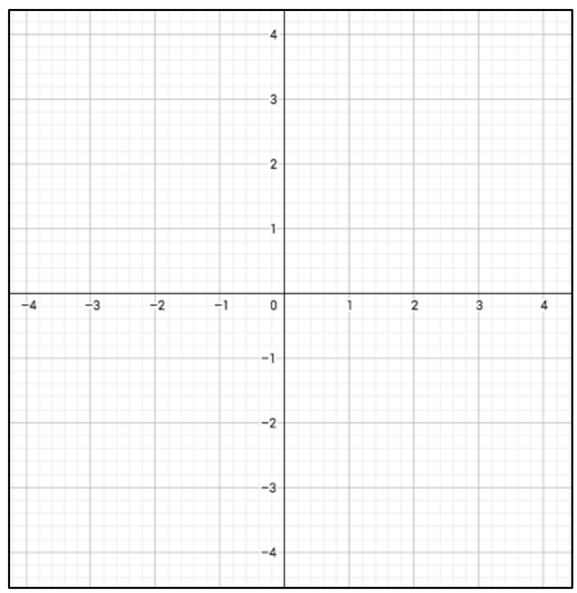


Figura 2



7. Traslada la figura 2 a la figura 3 de tal forma que un vértice (cualquiera) quede en el origen. Luego dibuja en la figura 4 la figura 3 pero rotada 90º con respecto al origen.

Figura 3

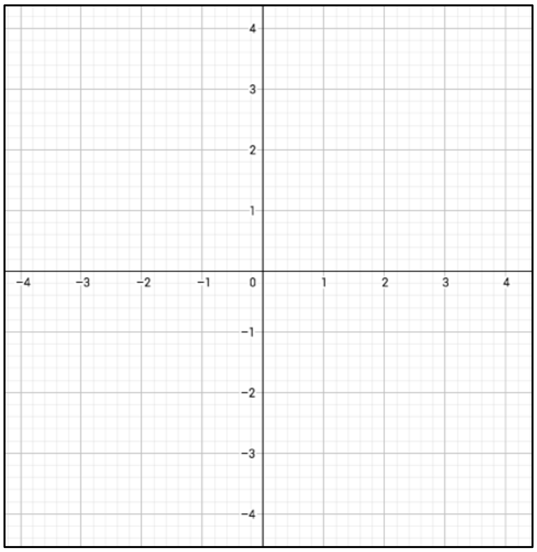
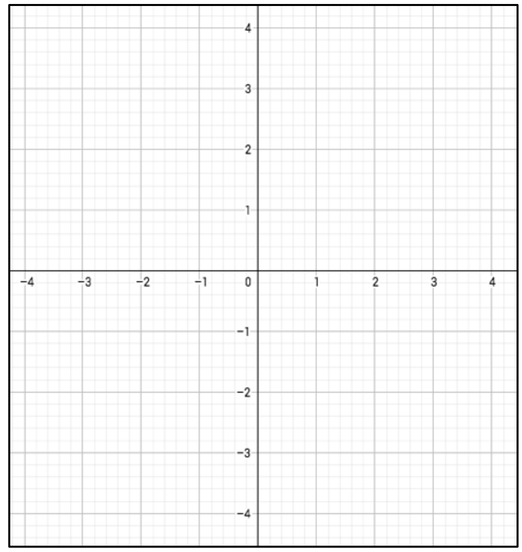
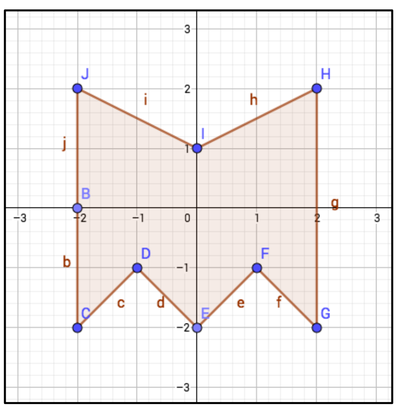
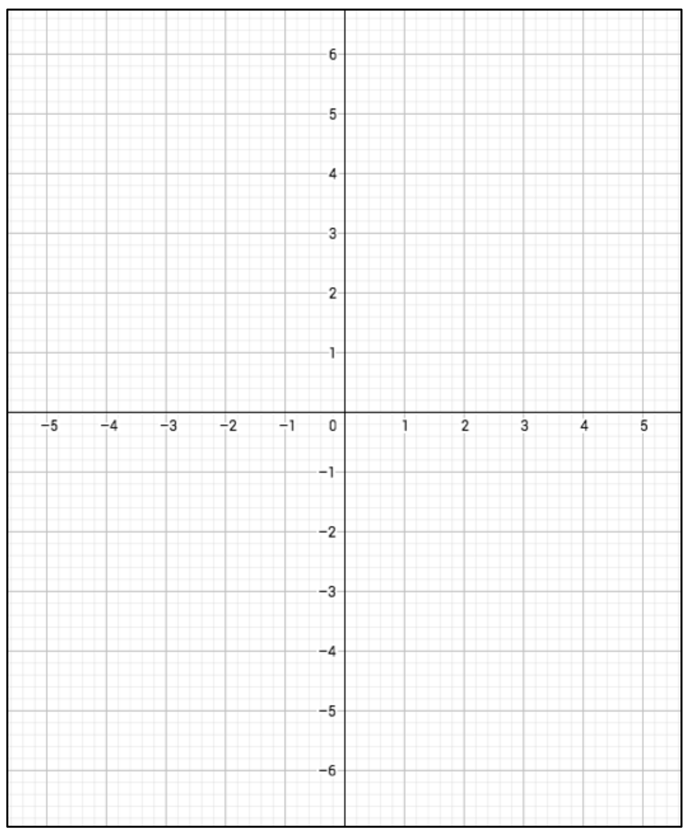


Figura 4



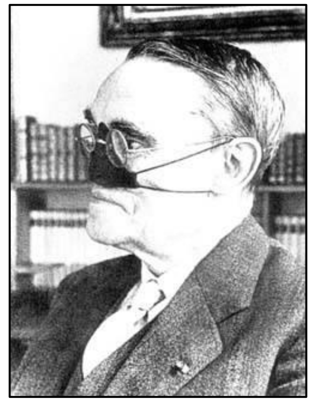
8. De la siguiente figura rótala 90º, cámbiela al tamaño que prefieras y traslada la figura de su posición original





9. ¿Sabes quienes, son los siguientes personajes?, relaciona sus nombres con una flecha en las imágenes.

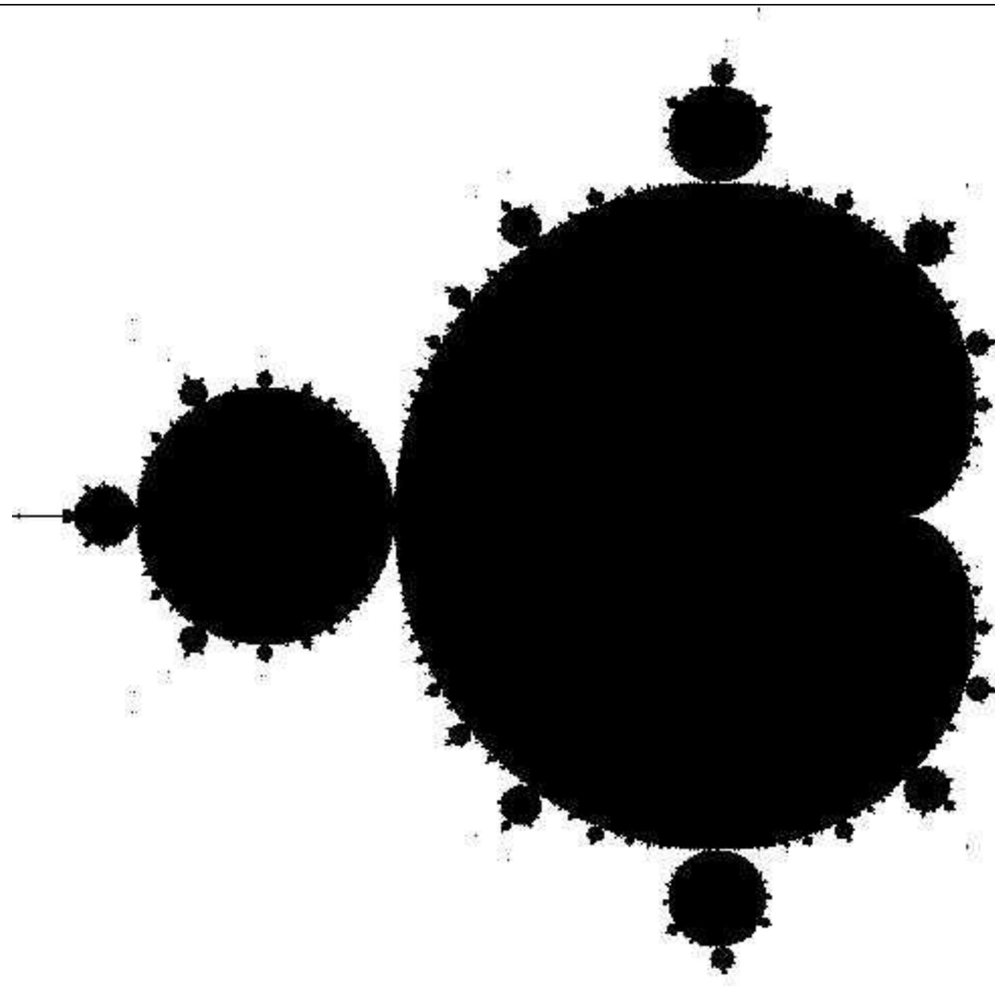
Pierre Joseph Louis Fatou
(1878, 1929)



Gaston Maurice Julia
(1893, 1978)

Benoit Mandelbrot
(1924—2010)

10. Observa bien la siguiente imagen, anota las características más resaltantes.



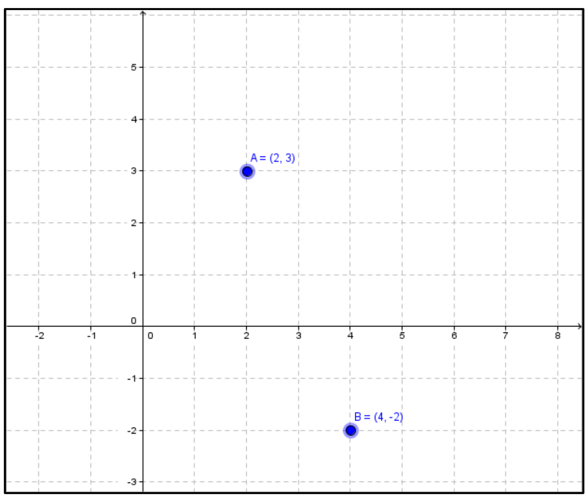
Características:

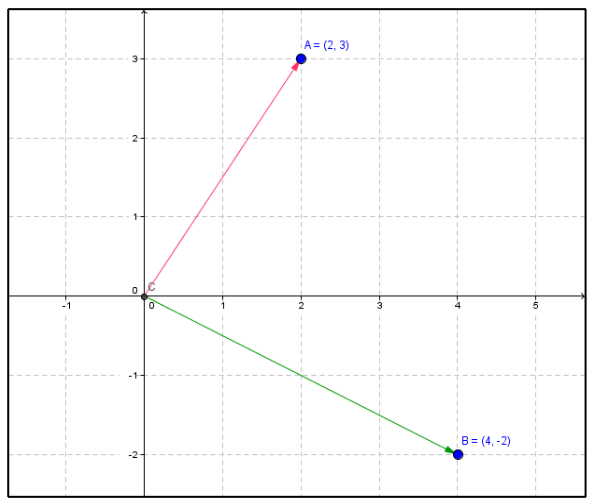
11.3. Anexo 3: Sesiones de la propuesta didáctica. [12]

11.3.1. Sesión 1. Números Laterales

Nombre____Fecha:________________

Bienvenido a la primera sección, a continuación, te presentaremos los **Números Laterales (NL)**, o también llamados **pseudo Vectores**. Ellos son números como el 0, 1, -2, 3, … etc. pero se escriben de una forma peculiar, se escriben en **parejas**, como si fueran puntos en el plano **(pares ordenados)**. Así el número **(4,-2)** es un número Laterales, con **abscisa** en 4 y **ordenada** en -2.
Por ejemplo, los números Laterales (2,3) y (4,-2) se pueden simbolizar con las letras mayúsculas A y B, respectivamente.





Podemos representar también, estos números como pseudo-vectores en el plano, es decir, flechas que se desplazan desde el origen hasta los puntos indicados (Figura).

Resulta que tanto a los números Reales, como a los números Laterales también se les puede aplicar las operaciones de **suma** y **multiplicación** y a partir de estas resultan otras operaciones básicas como resta, división, potencia, etc.

<u>SUMA</u>.
Para sumar dos números Laterales tenemos que sumar sus **componentes**, pero se debe tener en cuenta que solo se puede entre las componentes de la misma naturaleza, es decir,

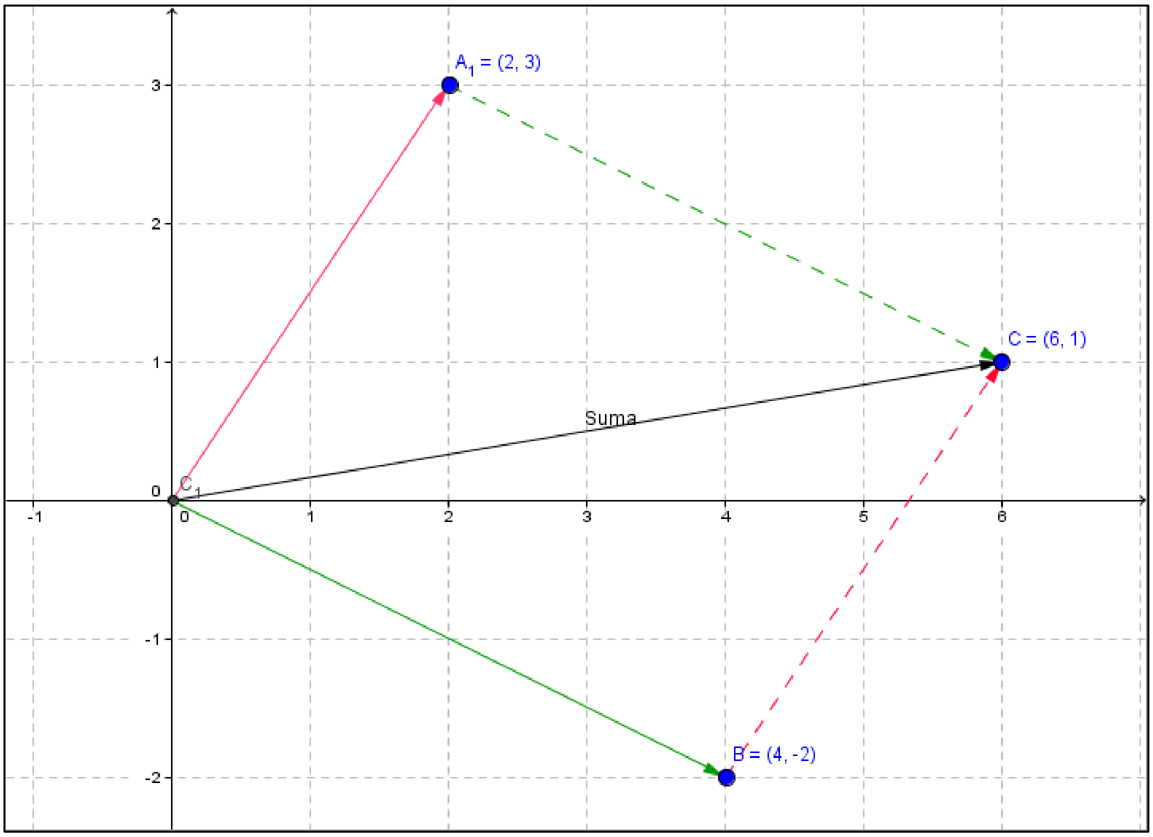
---

[12] Todas las imágenes que se presentan en este y en los siguientes anexos fueron realizadas por el autor por medio de los programas Excel y GeoGebra. Los retratos de Mandelbrot, Julia y Fatuo fueron extraídos de la Web y son imágenes libres.

ordenada con ordenada y abscisa con abscisa. Así, por ejemplo, el NL (2,3) sumado con (4,-2) da como resultado otro número lateral (6,1).

A	=	(	2	,	3	)
B	=	(	4	,	-2	)
A+B		(	6	,	1	)

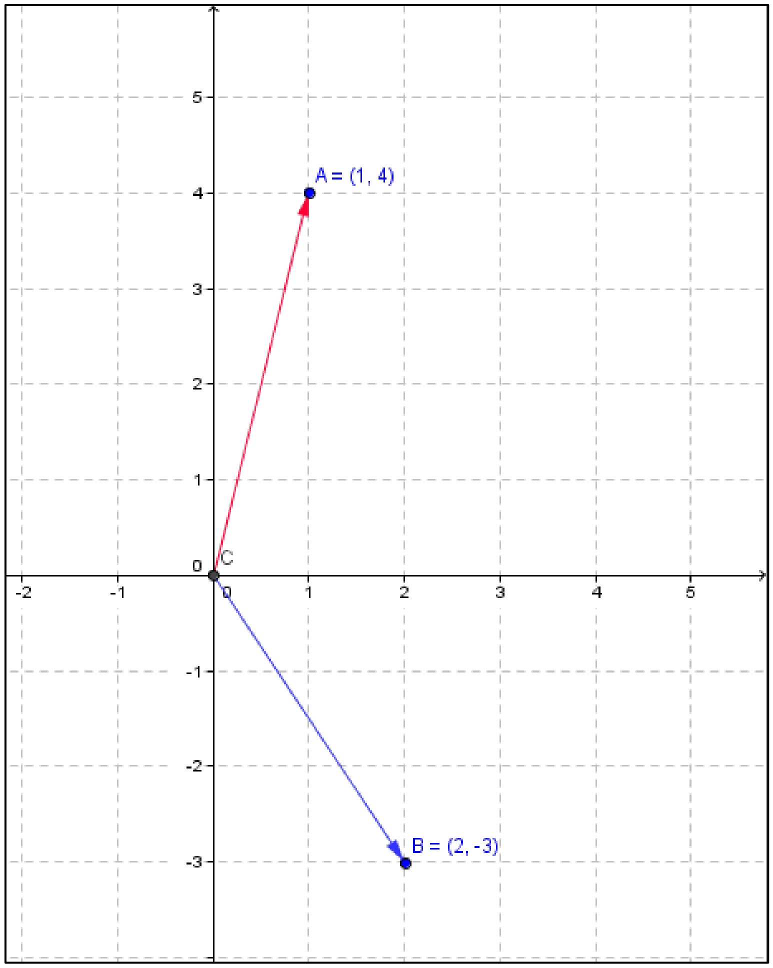
Estos tres puntos se pueden representar en el plano, como sigue.



Nótese, el paralelogramo que se forma al trasladar cada vector al lado opuesto. Este método de suma se le conoce como METODO DEL PARALELOGRAMO y se utiliza para representar gráficamente la suma numérica entre NL.

Actividad 1:

En la siguiente ilustración, usar el **método del paralelogramo** para sumar los dos números laterales, comprobar enseguida con la operación, si es correcto o no el dibujo realizado.



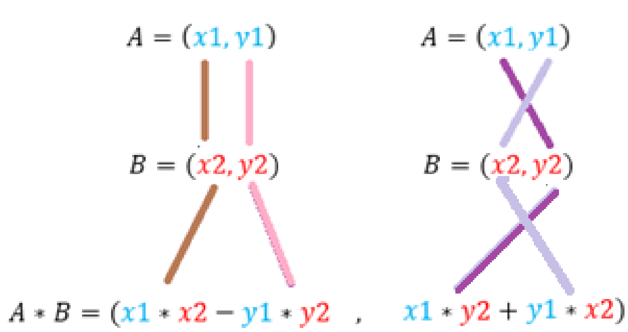
MULTIPLICACIÓN

Para la multiplicación ocurre algo similar a la suma, es decir, el resultado es un NL, pero el algoritmo es algo distinto.

Sea $A = (x1, y1)$ y $B = (x2, y2)$

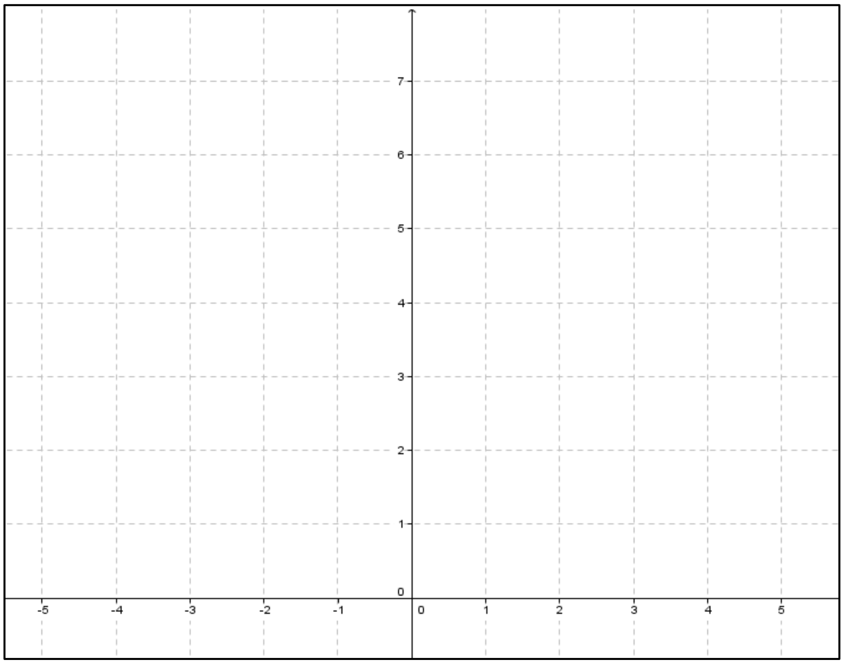
$$A * B = (x1 * x2 - y1 * y2\ , x1 * y2 + y1 * x2)$$

Un modo sencillo de hacer esta operación sería seguir las líneas de la siguiente figura, multiplicando las componentes indicadas y colocando su resultado en donde se muestra:



Actividad 2:

Dibujar en el siguiente plano los NL (1,3) y (2,1), realizar la multiplicación ubicar nuevo punto en el plano



Otro método de multiplicación de números laterales

Actividad 3:

De la actividad anterior con NL, medir con transportador y regla el ángulo y el tamaño de cada pseudo Vector, completar la siguiente tabla y responder las siguientes preguntas.

Número lateral	Tamaño	Ángulo
A = (3 , 1)		
B = (1 , 4)		
A*B = (,)		

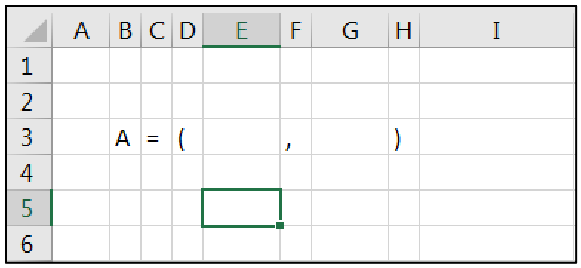
a. ¿Qué relación encontraste entre los tres ángulos de la tabla? ___________________
____
b. ¿Qué relación hay entre los tamaños de los NL?______________________________
____
c. Describir un método que permita multiplicar NL geométricamente______________

CALCULADORA DE NÚMEROS LATERALES

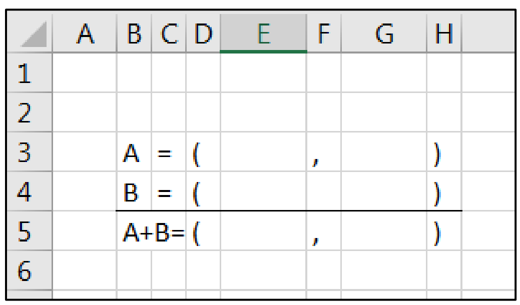
A continuación, se explicará cómo se programa una calculadora de NL en hojas de cálculo

Actividad 4.

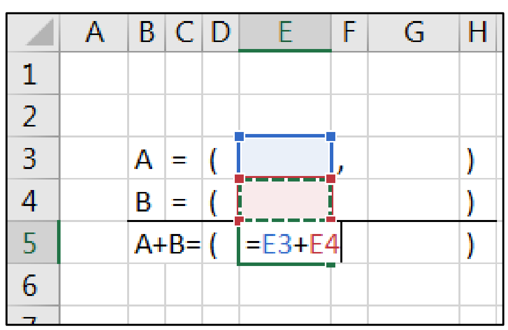
1. Abrir una hoja de cálculo. Escribir en las celdas los símbolos espacios necesarios para escribir un Número Lateral A=(,); cambiar si deseas, el tamaño a las celdas.



2. Repetir el procedimiento debajo para el número lateral B
3. Resaltar el lado inferior de las casillas B4 a H4, y repetir el proceso del punto 2 para el resultado de A+B, como ilustra la siguiente figura.

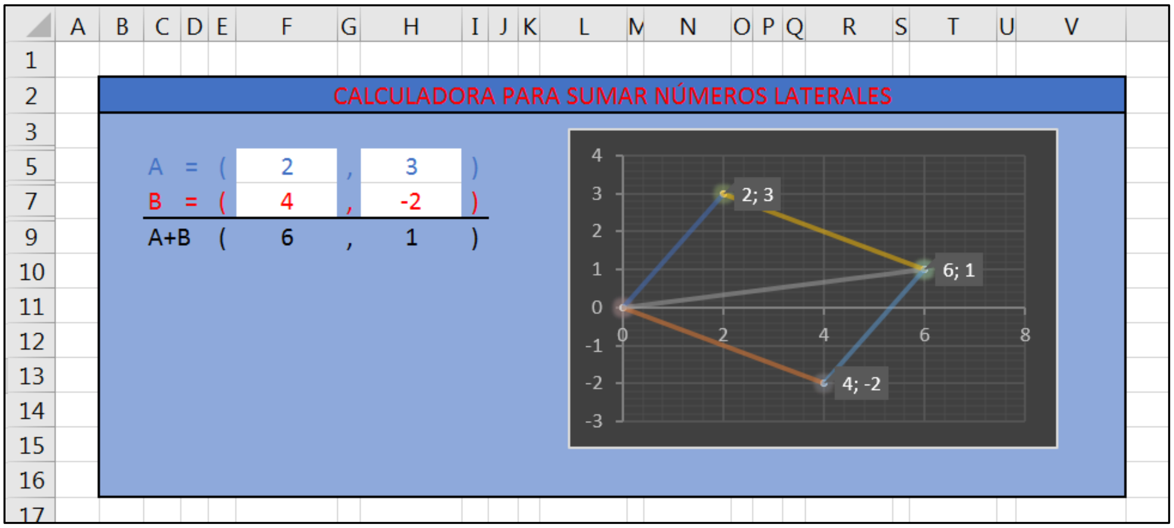


4. En la primera componente del número A+B escribir la fórmula “=E3 + E4” luego presionar la tecla “Enter”. Ilustración 9



5. Realizar el mismo procedimiento en la celda G5 para las componentes **y** de los números laterales **A** y **B**.
6. Pintar las celdas de la calculadora de tal forma que los espacios donde escriben los NL estén de otro color como la Ilustración 3.

7. Insertar la gráfica con los valores de los tres vectores para ilustrar la operación como en la siguiente ilustración



Actividad 5.

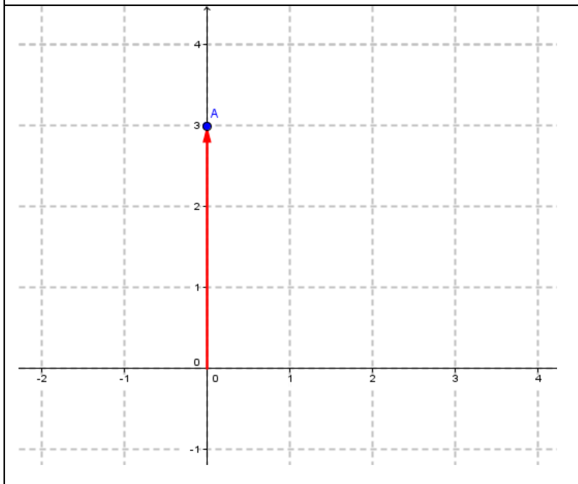
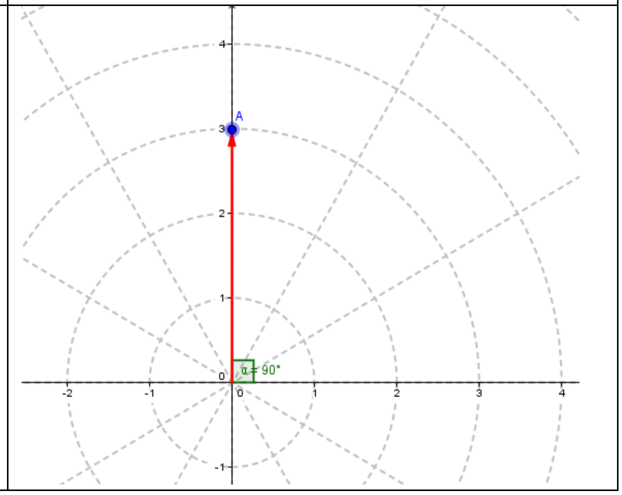
Calcular las siguientes operaciones:

SIN usar la calculadora realiza las siguientes operaciones			
(10,40)+(65,32)		(3,5)*(6,7)	
(52,300)+(-232,53)		(10,10)*(-10,10)	
(-242,-39)+(1,543)		(2,3)*(5,1)+(1,2)=	
USANDO la calculadora realiza las siguientes operaciones:			
(42,95)+(-21,33)		(-2,-3)*(5,3)+(3,-2)=	
(35,-70)+(20,-10)		(1,0)*(0,2)+(0,2)*(1,2)=	
(-15,40)+(12,-2)+(120,87)		(20,-2)*(-30,-1)*(11,2)*(5-2)=	

MÉTODO ANGULAR

Como vimos anteriormente Los Números Laterales se representan en **coordenadas cartesianas** donde tienen una componente en el **eje x** y otra en el **eje y**. También se pueden representan en otro tipo de coordenadas, a éstas se les llama **Coordenadas Angulares**.
Como se recuerda, en la ***actividad 3*** a los NL se les pueden medir su tamaño y su ángulo (obsérvese la tabla de dicha actividad). A continuación, se observa esta forma de representarlos.

$$A = (\boldsymbol{Tamaño}, \boldsymbol{Ángulo})$$

COMPARACIÓN DE LOS DOS TIPOS DE COORDENADAS	
COORDENADA CARTESIANA	COODENADA ANGULAR
A = (0, 3) donde tiene 0 unidades en el **eje x** y 3 unidades en el **eje y**	**A = (3 , 90º)** Donde tiene un tamaño de 3 unidades y un ángulo de 90 grados
	

Al plano del lado derecho del cuadro es llamado también **geoplano.**

Actividad 6:

Dibujar en el geoplano los siguientes puntos

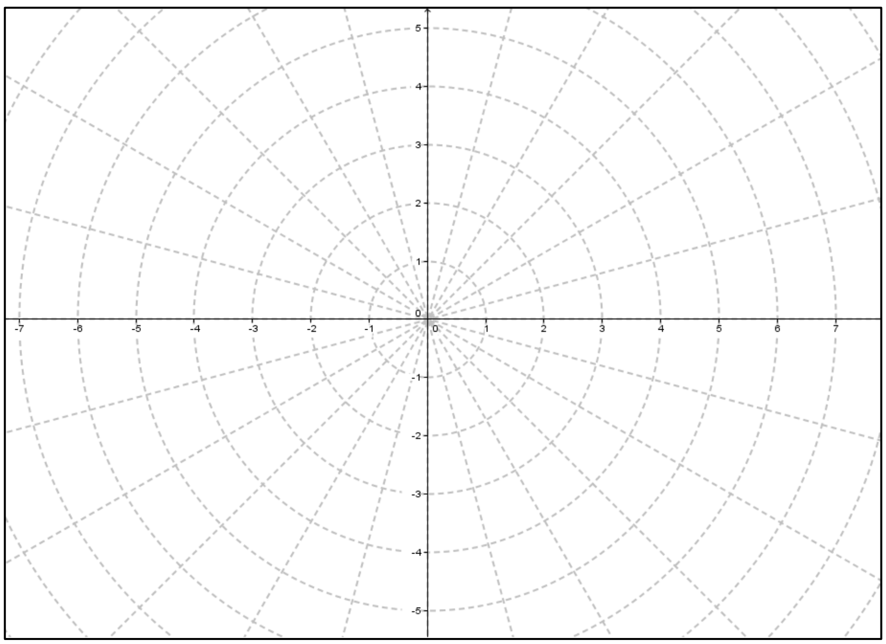
$M = (5,30º)$

$N = (4.5,165º)$

$Ñ = (2.5,-105º)$

$O = (1,-135º)$

$P = (3.2,-180º)$



Actividad 7:

Completa el texto.

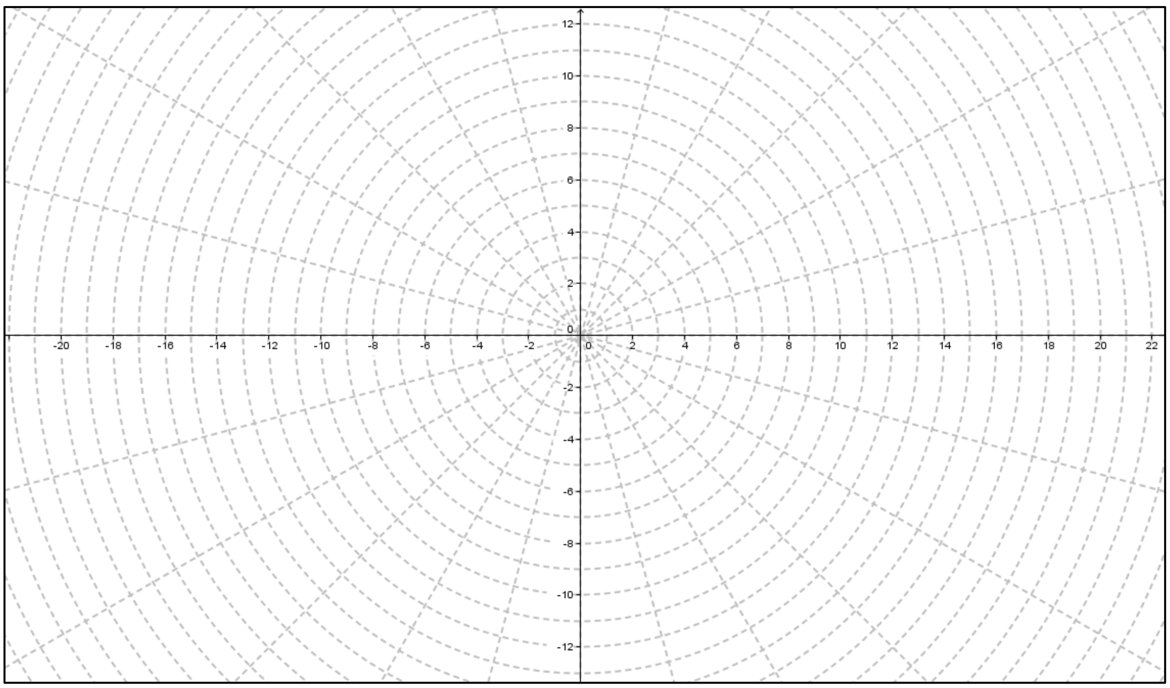
Según se ha concluido el algoritmo para multiplicar dos Números Laterales en forma angular es simplemente ______________ los **tamaños** y _____________ sus **ángulos**

<u>Sumar</u> <u>Restar</u> <u>Multiplicar</u> <u>Dividir</u>

Actividad 8:

Con ayuda del geoplano multiplica los siguientes NL.

	A	B	A x B
1.	(3 , -30º)	(4 , -60º)	
2.	(2 , 180º)	(3 , 0º)	
3.	(2 , -60º)		(4 , 180º)
4.		(5 , 15º)	(20 , 30º)



11.3.2. Sesión 2: El plano lateral

Nombre____Fecha:______________

Hoy presentamos cómo se ubican los números laterales en el Geoplano, usaremos dos clases de planos, uno físico y otro digital.

Actividad 1:

Según lo expuesto por el profesor en **coordenadas cartesianas** la **suma** geométrica de los números laterales se realiza más fácilmente dibujando la figura geométrica llamada _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ usando los números laterales.

La multiplicación se realiza más fácilmente en coordenadas _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ y el algoritmo se ejecuta _ _ _ _ _ _ _ los ángulos y _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ los tamaños.

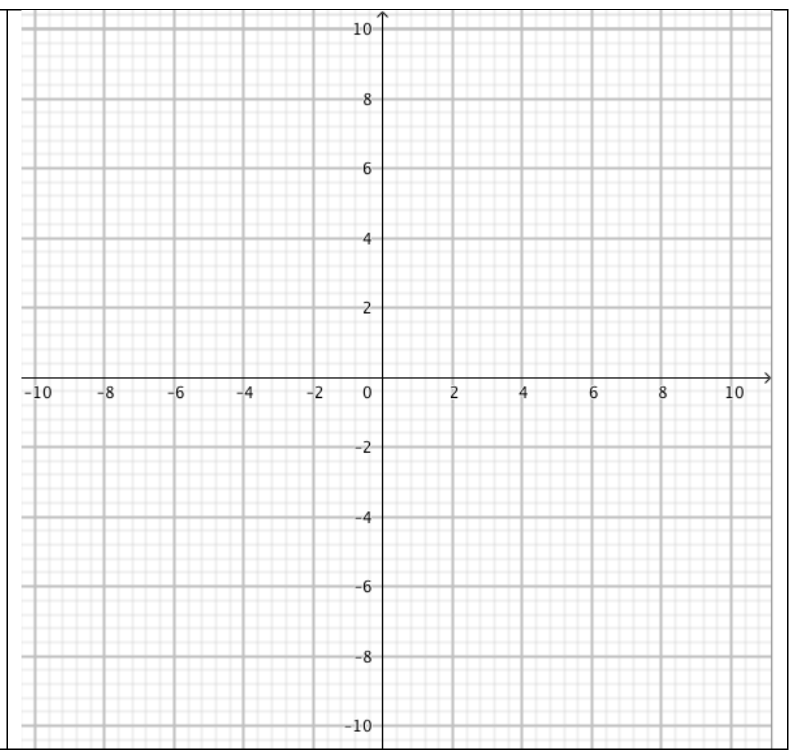
En coordenadas cartesianas la multiplicación se hace $A = (m, n)$ $\qquad B = (p, q)$

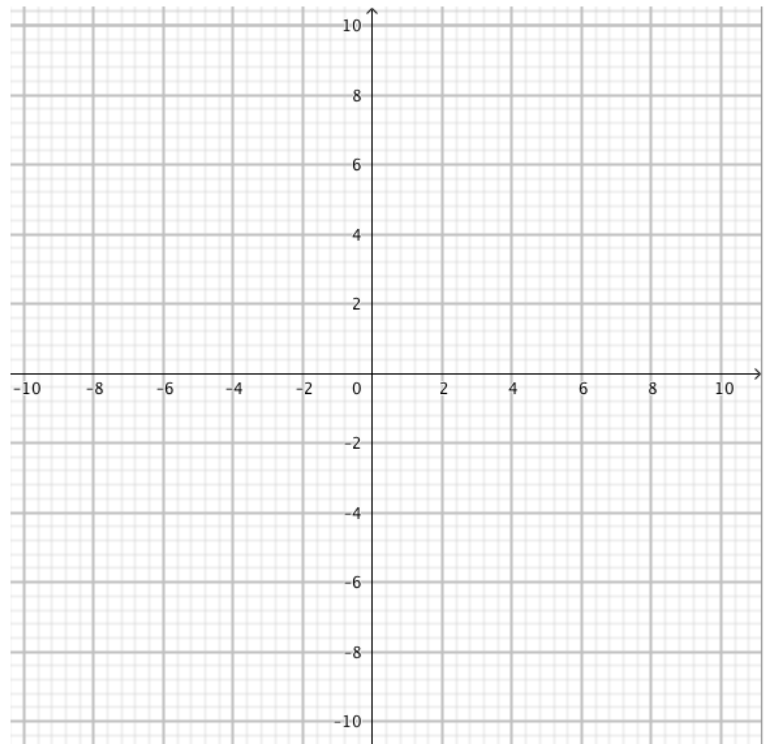
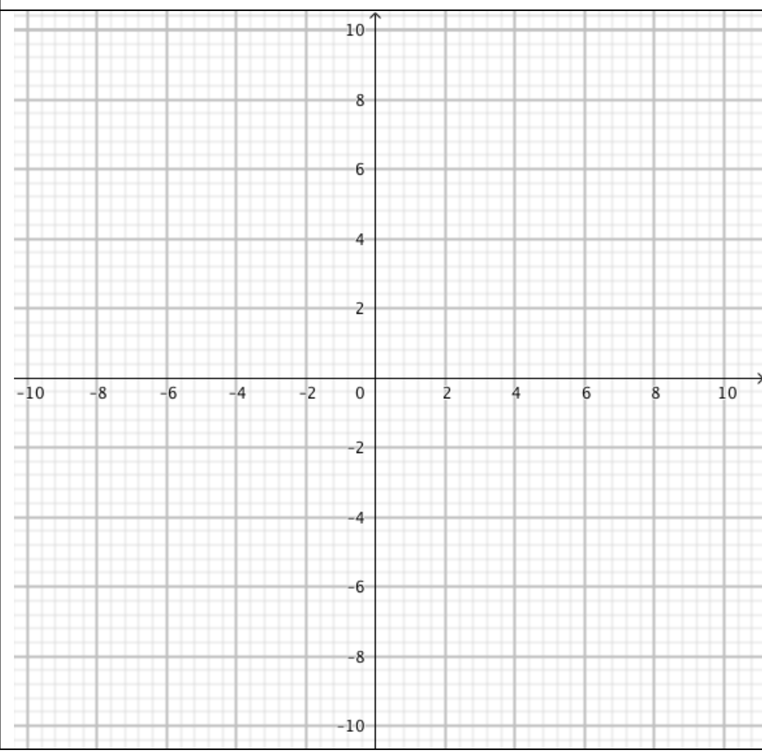
$$A \cdot B = (\qquad , \qquad)$$

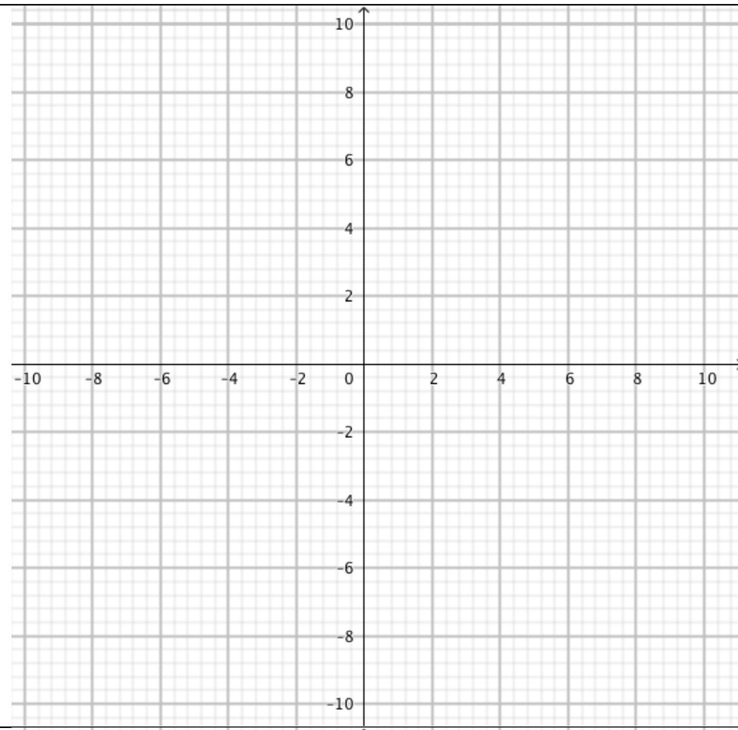
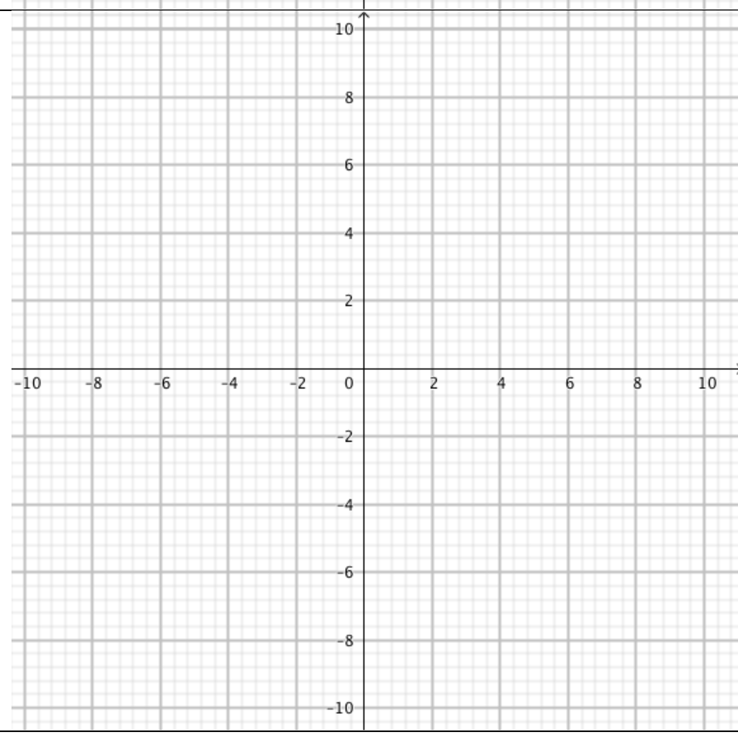
Actividad 2.

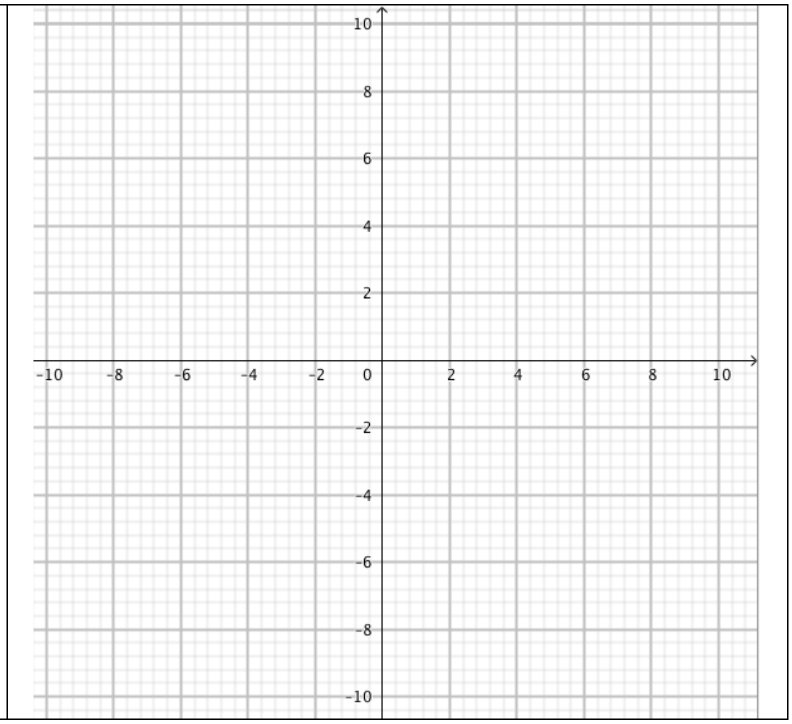
En el geoplano físico realizar las siguientes operaciones con las bandas elásticas y dibujarlas en los siguientes planos correspondientes

$A = (2,6)$ $\quad B = (8,2)$ $\quad C = (-6,2)$ $\quad D = (6,4)$ $\quad E = (6,-2)$ $\quad F(-8,-8)$

$A + B = (\quad , \quad)$	

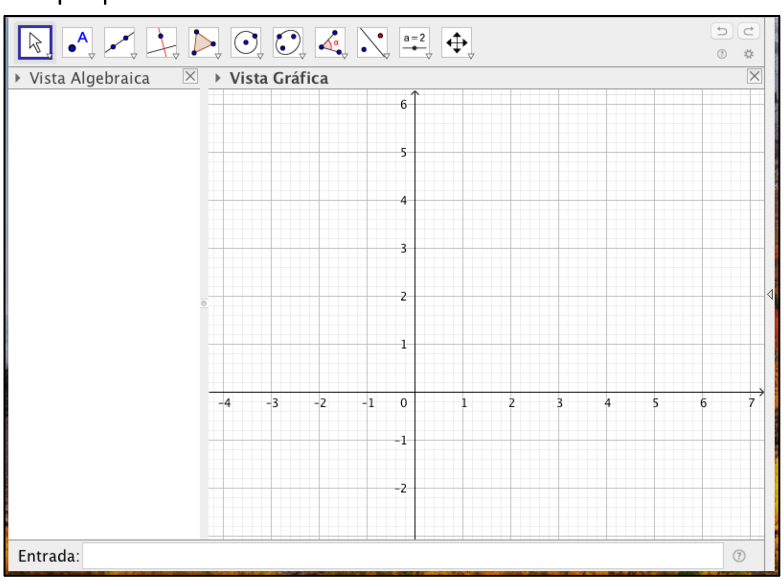
$C + D = (\quad , \quad)$	
$E + F = (\quad , \quad)$	

$G = (0,2)$ $H = (4,4)$ $G * H = (\quad , \quad)$	
$I = (4,2)$ $J = (-2,0)$ $I * J = (\quad , \quad)$	

$K = (0{,}2) \quad L = (-4,-4)$ $K * L = (\quad , \quad)$	

GeoGebra

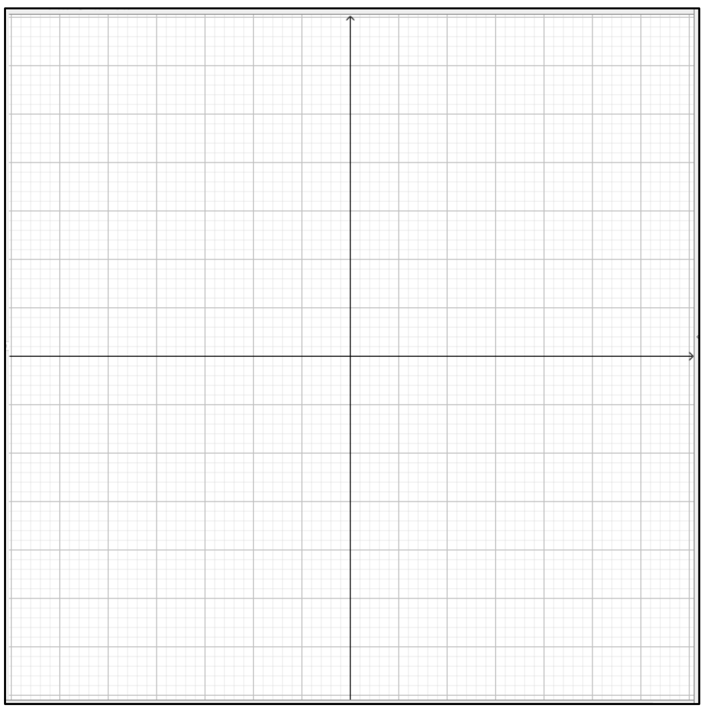
En tu computadora se encuentras el programa GeoGebra. Este es un ***software de geometría dinámica***, en otras palabras, según Wikipedia es un procesador geométrico y algebraico, que trae un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas.
Este programa te permite hacer tanto, dibujos en el plano (geométricos) como operaciones en hojas de cálculo propias del software.



En este sentido, los algoritmos antes vistos de **suma y multiplicación de números laterales** también se pueden hacer en GeoGebra, y como veras, el programa inmediatamente puede realizar una “vista gráfica” de estas operaciones.

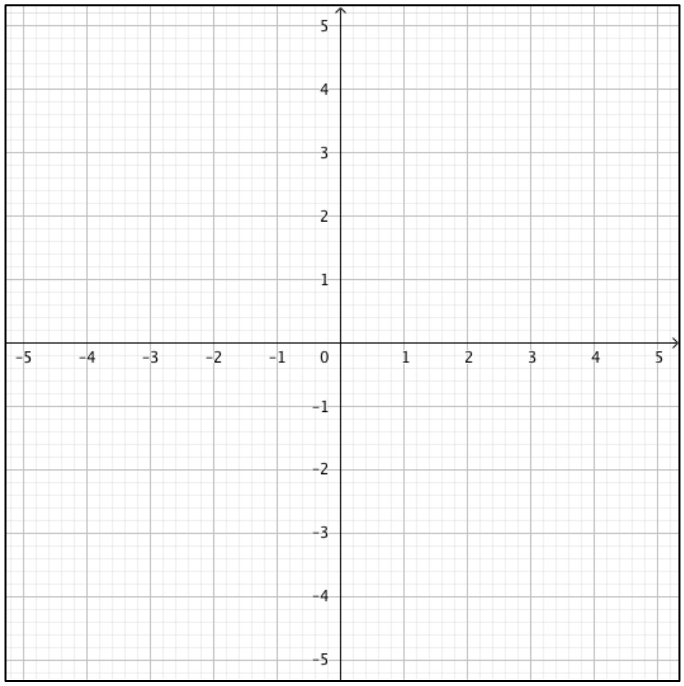
Actividad 3:

1. Explora las funciones gráficas del programa y dibujar puntos, líneas, semirrectas, círculos, ángulos, polígonos, triángulos, etc.
2. Borra todo y dibuja un polígono regular cualquiera usando la función “polígono regular”. Con la función señalador mover la figura (moviendo los puntos vértices) de tal manera que tome la forma de un objeto cotidiano (una casa, o un árbol, una cuchara etc.)
3. Con ayuda del docente inserta la “cuadricula” de fondo y cambia de colores la figura realizada. Intenta cambiar de grosor a las líneas y quítales la etiqueta (letras) de los puntos y segmentos de las mismas. Dibuja la figura.

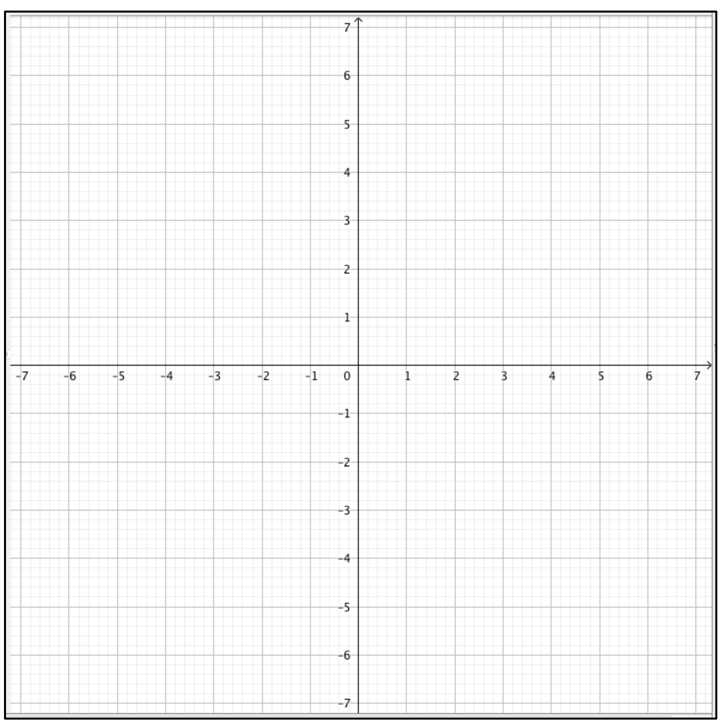


4. Borra todo. Desde la “vista algebraica” (cuadro inferior) inserta 6 puntos con las siguientes coordenadas $A = (0,0), B = (2,2), C = (-2,2), D = (2,3), E = (-2,3), F = (1,4), G = (-1,4)\ y\ H = (0,3)$. Une con en comando “segmento de recta” los puntos. Escribe, en la siguiente línea, que forma obtuviste_____________.
5. Basados en la figura anterior, imagina que a lo largo del **eje x** se encuentra un espejo, como ves, la figura del ejercicio se encuentra en la parte superior del **eje x** y por tanto debes dibujar como es su reflejo al otro lado de éste, inserta cada punto y construye la nueva figura.

6. De las dos figuras anteriores toma como punto de referencia el centro (0,0) y rota la imagen completa 90 grados. Dibuja la figura resultante.



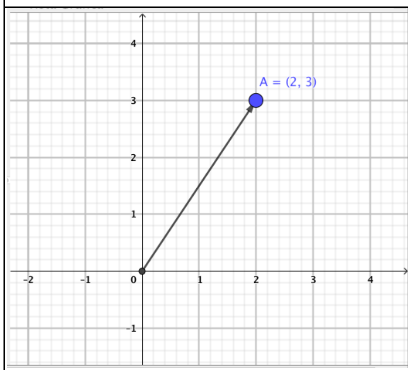
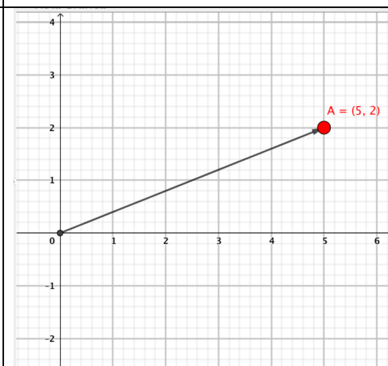
7. Borra todo. Diseña en el **Cuadrante I** del plano tu propia figura. Máximo 10 puntos. Rota la figura en el **Cuadrante IV** -90 grados con respecto al origen (sentido horario).
8. Refleja toda la figura en el **eje Y** como si hubiera un espejo en este.
9. Plasma la figura en el siguiente recuadro.



11.3.3. Sesión 3: La Transformación

Nombre____Fecha:__________________

Hoy les presentamos como se **transforman** los números laterales.
Sea un Número Latera cualquiera, digamos (2,3), en el ***plano x-y***. A este número se le aplica una operación (suma o multiplicación) con otro número lateral, al resultado se le llamará transformación, pero este nuevo número ya no se encuentra en el ***plano x-y*** sino en otro plano, llamémoslo ***plano u-v***.

Plano x-y	***Transformación***	***Plano u-v***
	¿Cuál fue la operación utilizada para esta transformación? (2 , 3) __ (___ , ___) _______________ (5 , 2)	

Así mismo, con el método de transformación de NNLL, podemos convertir todos los puntos del ***plano x-y*** en otros puntos si lo deseamos.

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Donde T es el operador de transformación del NL (x, y), así como el símbolo $+$ es el operador de la suma, y su resultado nos da el Número Lateral (u, v) que se ubica el ***plano u-v***.
Así, por ejemplo, si tenemos la relación:

$$(u, v) = T(x, y) = (x, y) + (4, -3)$$

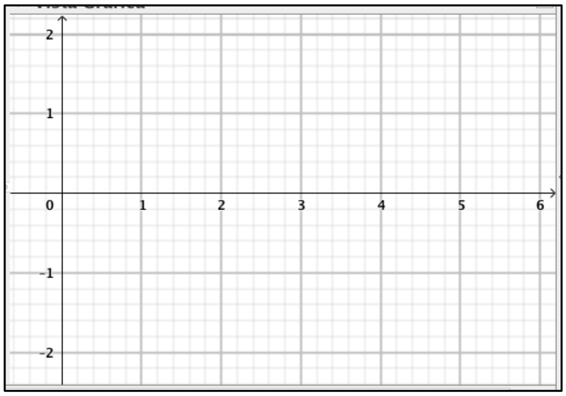
o $$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{4}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{3})$$

Esto quiere decir que, para cualquier Número Lateral que actúe en la relación, digamos $(1{,}2)$, se sustituye en ésta por, $x = 1$ y $y = 2$ para ser operados mediante la suma con (4,3) -ya dado-, suministrando el resultado…

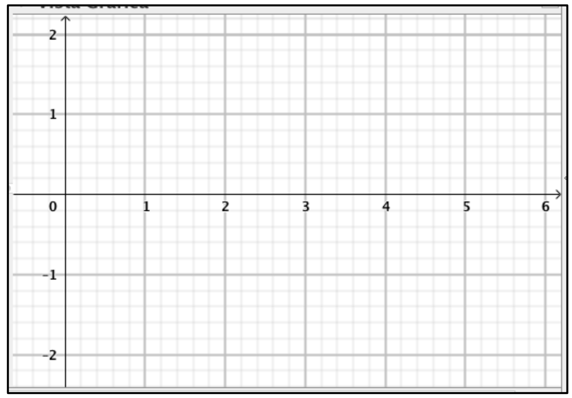
$$T(1{,}2) = (1{,}2) + (4, -3)$$
$$(u, v) = T(1{,}2) = (1 + 4\,, 2 - 3)$$
$$(u, v) = T(1{,}2) = (5, -1)$$
$$(u, v) = (5, -1)$$

Esto quiere decir que en el ***plano u-v*** el punto seria $\boldsymbol{u} = \mathbf{5}$ y $\boldsymbol{v} = -\mathbf{1}$.
Mapea los puntos en los planos correspondientes a continuación…

Plano x-y



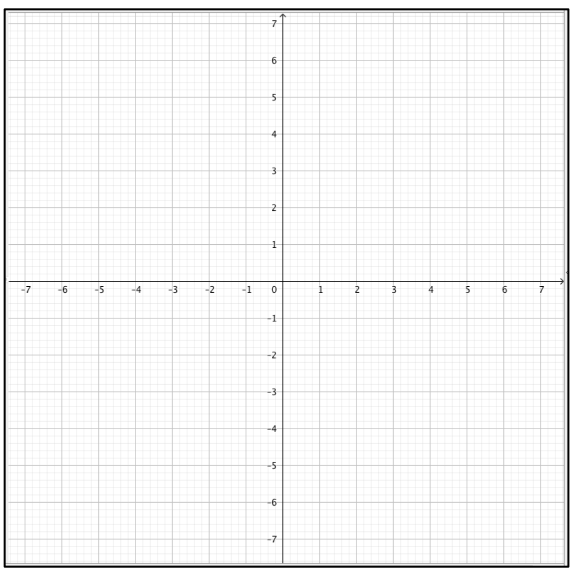
Plano u-v



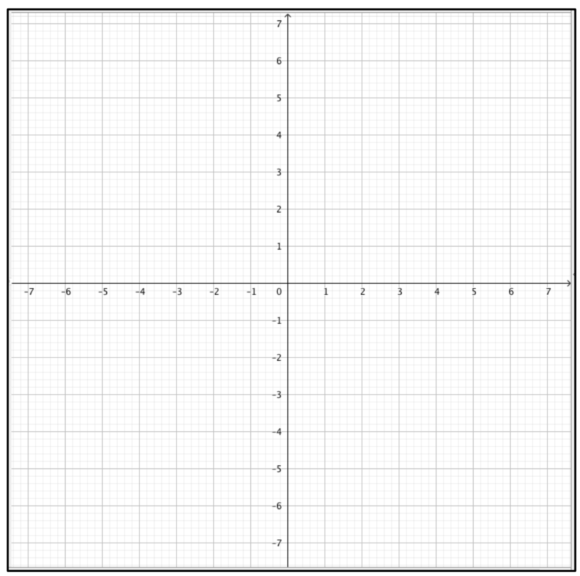
Actividad 1.

(En GeoGebra) Realiza en el ***plano x-y*** un dibujo con <u>5</u> NNLL cualquiera. A esto aplícales la transformación $T(x, y) = (x, y) + (1, -1)$. Mapea en el ***plano u-v*** los resultados.

Plano x-y



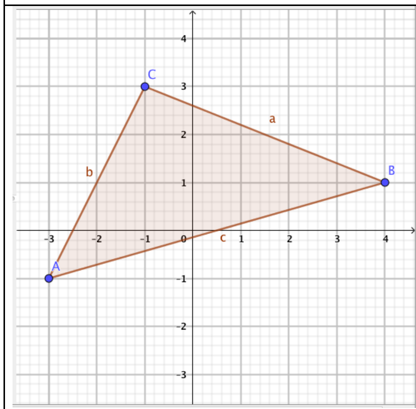
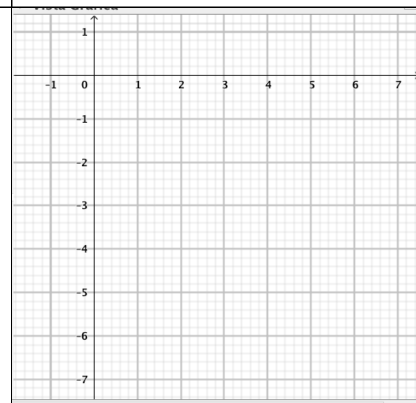
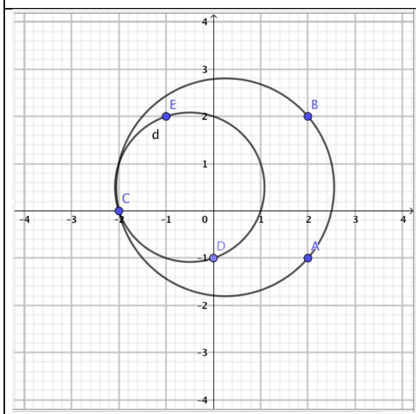
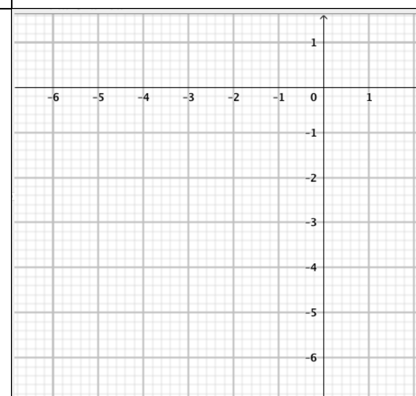
Plano u-v



(Espacio de operaciones)

Actividad 2:

Realiza la transformación de las siguientes figuras al ***plano u-v***

Plano x-y	*Transformación*	*Plano u-v*
	$T(x,y) = (x,y) + (2,-2)$ $(u,v) = (x+2, y-2)$	
	$T(x,y) = (x,y) + (-2,-2)$ $(u,v) = (\qquad , \qquad)$	

Se puede entonces concluir que la transformación T de números Laterales con la operación **suma** da como resultado en el ***plano u-v***:

a) Una Rotación
b) Una Traslación
c) Una Dilatación

Porque…

<u>Multiplicación</u>

La multiplicación en una transformación es de la forma $T(x, y) = (\,n\,, m) \cdot (x, y)$.
Realizando el producto, se obtendrá una relación en términos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

$$(u, v) = (nx - my\,, ny + mx)$$

Donde $\boldsymbol{u} = nx - my$ y. $\boldsymbol{v} = ny + mx$
Algunas características de la multiplicación son:

1) **Producto de la forma** $T(x, y) = (n, 0) \cdot (x, y)$

   Cuando $(n, 0)$, por ejemplo $(2{,}0)$

   $$T(x, y) = (2{,}0) \cdot (x, y)$$

   Si realizamos la operación completa nos queda

   $$T(x, y) = (2x - 0y, 2y + 0x)$$

   $$(u, v) = (2x, 2y)$$

   En general, para cualquier $(n, 0)$ la operación sería

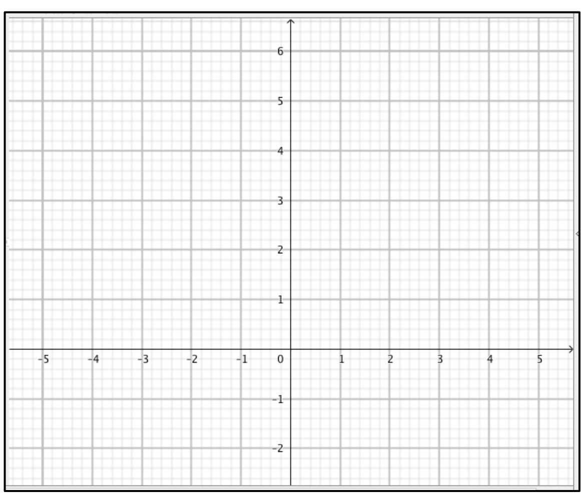
   $$(u, v) = (nx, ny)$$

Actividad 3:

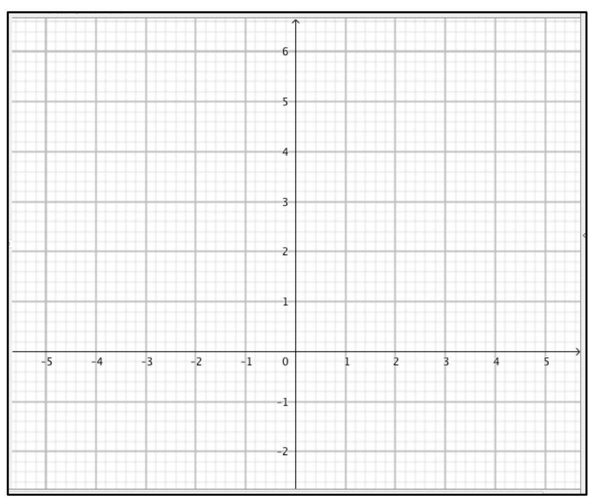
Sea la transformación $T(x, y) = (2{,}0) \cdot (x, y)$
Transformar los siguientes Números Laterales $A = (-3{,}0), B = (2, -2), C = (0{,}3)$, $D = (0{,}0), E = (2.5{,}0)$, según la relación $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{2x}, \boldsymbol{2y})$

(espacio para cálculos)

Plano x-y



Plano u-v



Actividad 4: Completa la tabla

*NL en el **plano x-y***	*Formula de Transformación*	*NL en el **plano u-v***
$A = (2, -3)$	$T(x, y) = (3,0) * (x, y)$ $(u, v) = (\_\_\_x, \_\_\_y)$	$A` = (\_\_, \_\_)$
$B = (-1,1)$	$T(x, y) = (-8,0) * (x, y)$ $(u, v) = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$	$B` = (\_\_\_, \_\_\_)$
$C = (\_\_, \_\_)$	$T(x, y) = (0,0) * (x, y)$ $(u, v) = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$	$C` = (\_\_, \_\_)$
$E = (5,7)$	$T(x, y) = (\_\_\_,0) * (x, y)$ $(u, v) = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$	$E` = (5,7)$

Se puede concluir que la transformación T de un número Lateral con la operación **multiplicación** de la forma $(n, 0)$ da como resultado:

a) Una rotación
b) Una Traslación
c) Una Dilatación

Sustentar…

2) **Producto de la forma** $T(x,y) = (0, m) \cdot (x, y)$

$$= (0x - my, 0y + mx)$$
$$(u, v) = (-my, mx)$$

Actividad 5.

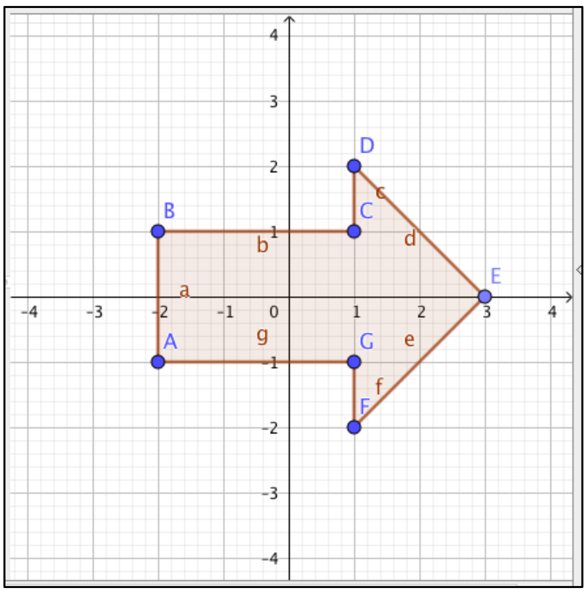
Sea la transformación $T(x,y) = (0,2) \cdot (x,y)$

$$(u, v) = (\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)$$

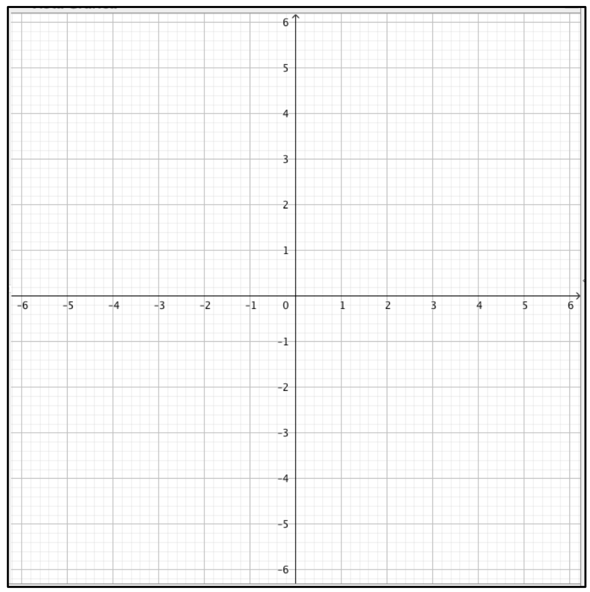
Desde el punto de vista geométrico ¿Qué experimenta una figura cualquiera, con esta transformación? (Rotación, Dilatación o Traslación)

En la siguiente figura transforma sus vértices y observa que pasa.

Plano x-y



Plano u-v



Actividad 6:

Construye una calculadora que multiplique NNLL en GeoGebra.

Realiza el cálculo de las siguientes operaciones con la transformación $T(x,y) = (0,3) * (x,y)$ en GeoGebra y completa.

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
$(4,8)$	$(\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)$
$(-30,46)$	$(\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)$
$(234,322)$	$(\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)$

3) **Transformación de la forma** $T(x,y) = (m, n)(x, y) + (a, b)$

En términos de u y v

$$(u,v) = (mx - ny + a\,, my + nx + b)$$

Por ejemplo.

Sea un punto $A = (2,3)$ y la transformación $T(x,y) = (2,1) \cdot (x,y) + (4,5)$

En términos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ queda

$$(u,v) = (2x - 1y + 4\,, 1x + 2y + 5)$$

Donde $\boldsymbol{u} = 2x - y + 4$ y $\boldsymbol{v} = x + 2y + 5$.

Actividad 7.

Realiza en GeoGebra la transformación de los siguientes puntos usando la relación $T(x,y) = (2,2)(x,y) + (3,2)$

$$(u,v) = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\,, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$$

$T(0,0) = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$ $T(3,0) = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

$T(0,3) = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$ $T(3,3) = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

Plano x-y	*Plano u-v*

4) Transformación cuadrática

Una expresión de la forma $T(x,y) = (x,y)^2 + (m,n)$ es una transformación “cuadrática” ya que uno de sus términos esta elevado al cuadrado. Lo que corresponde al producto $(x,y) \cdot (x,y)$.

Así, por ejemplo, la transformación $T(x,y) = (x,y)^2 + (0,0)$ corresponde en términos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ a

$$(u,v) = (x^2 - y^2 + 0\,, 2xy + 0)$$
$$(u,v) = (x^2 - y^2\,, 2xy)$$

Donde $\boldsymbol{u} = x^2 - y^2$ y $\boldsymbol{v} = 2xy$

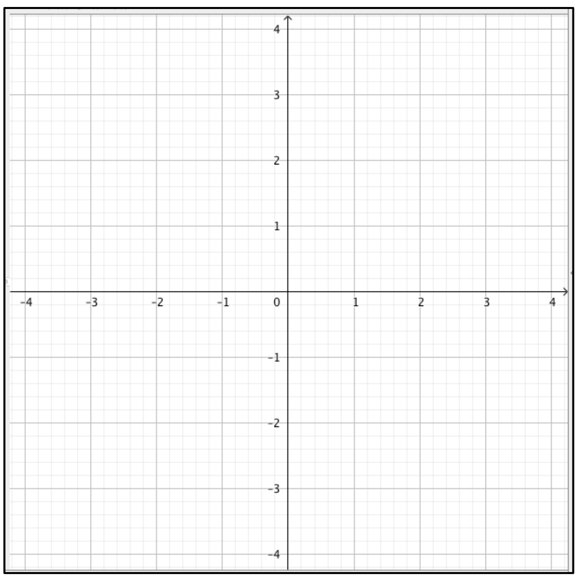
Actividad 8.

Por medio de la transformación $T(x,y) = (x,y)^2 + (0,0)$ realiza en Geogebra la transformación de cada punto de la tabla.

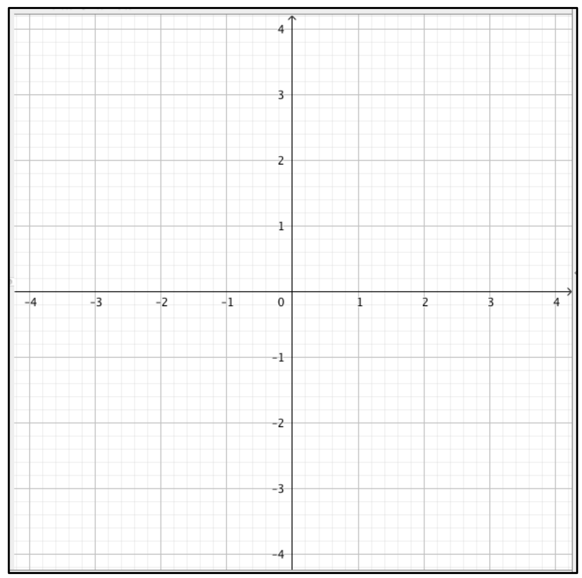
Puntos en el plano x-y	*Puntos en el plano u-v*
$(-3,1)$	
$(-2,1)$	
$(-1,1)$	
$(0,1)$	
$(1,1)$	
$(2,1)$	
$(3,1)$	

Mapea las dos trayectorias (x, y) y (u, v) de los puntos del cuadro anterior

Plano x-y



Plano u-v

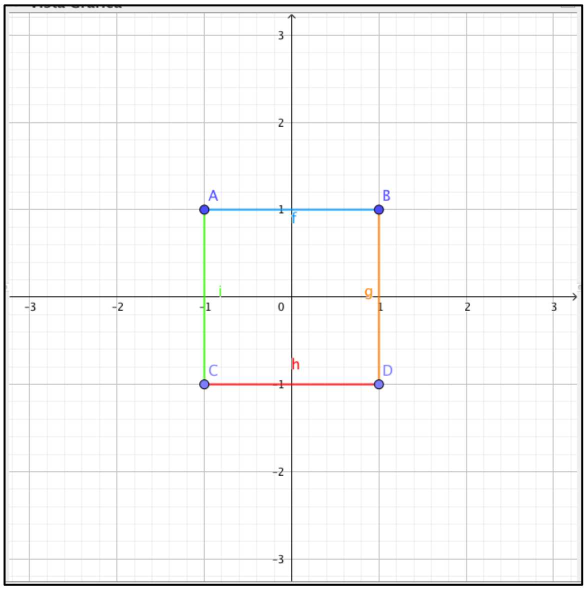


Como se observó, el registro de cada punto del ***plano x-y*** deja una figura de la forma de ___________, mientras que, la figura que se observa en el ***plano u-v*** es ______________.

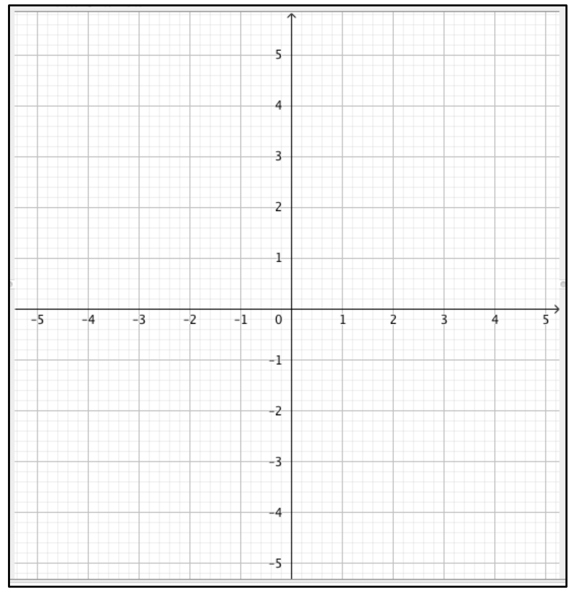
Actividad 9.

Usando la transformación $T(x, y) = (x, y)^2 + (m, n)$ donde $(m, n) = \{(0,0), (1,2), (1, -2), (-1,2), (-1, -2)\}$, describe las transiciones del punto (m, n) en el *plano u-v*, cuando P se desplaza por el cuadrado $ABCD$.

Plano x-y



Plano u-v



11.3.4. Sesión 4: El iterator

Nombre____Fecha:______________

En la sesión anterior, se usó la relación

$$T(x,y) = (x,y)^2 = (x,y)(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

que transformaba cualquier punto, en otro punto. Así, por ejemplo, el punto $P = (2{,}1)$, al sustituirlo en la transformación dada, se obtiene:

$$T(P) = T(2{,}1) = \left(2^2 - 1^2, 2(2)(1)\right)$$
$$P^* = T(2{,}1) = (3{,}4)$$

Es decir, el resultado de transformar el punto $(2{,}1)$ arroja como resultado el punto $(3{,}4)$. ¿Qué sucederá si, al resultado de la transformación T, $P^* = (3{,}4)$, lo transformamos utilizando la misma regla? Su resultado sería:

$$P^{**} = T(P^*) = T(3{,}4)$$
$$T(3{,}4) = (-7\ , 24\ )$$

Actividad 1.

Completa la siguiente tabla usando la transformación $T(P)$ empezando en el punto $(2{,}1)$

Número de Transformaciones	Resultado
0	$\underline{P = (\ 2\ ,\ 1\ )}$
1	$P^* = (\_\_\_,\_\_\_)$
2	$P^{**} = (\_\_\_\_,\_\_\_\_)$
3	$P^{***} = (\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_)$
4	$P^{****} = (\_\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_\_)$
5	$P^{*****} = (\_\_\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_\_\_)$

¿Hasta dónde podría realizarse este proceso que en adelante llamaremos **iteración**?

Escoge cualquier punto en el plano y realiza siguientes iteraciones según cada transformación

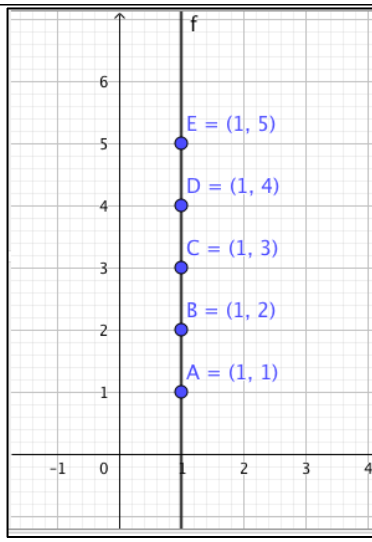
Nº	$T(x,y) = (2x, 2y)$	$T(x,y) = (x,y) + (2{,}2)$	$T(x,y) = (y^2, x^3)$
P	$\underline{(\ 5\ ,\ 4\ )}$	$\underline{(\quad,\quad)}$	$\underline{(\quad,\quad)}$
P^*	___ , ___	___ , ___	___ , ___
P^{**}	___ , ___	___ , ___	___ , ___
P^{***}	___ , ___	___ , ___	___ , ___

Actividad 2.

Descubre el patrón, explica cómo se obtuvo cada resultado y encuentra la transformación algebraica.

$(2,3)$	$(3,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$
$(3,-2)$	$(9,4)$	$(3,10)$	$(12,1)$
$(-2,-3)$	$(27,16)$	$(5,31)$	$(12,-11)$
$\underline{(-3,2)}$	___ , ___	$(9,94)$	$(-132,-23)$
$\underline{(2,3)}$	___ , ___	___ , ___	___ , ___
Explicación… Las componentes *x* e y se van intercalando, pero en cada iteración la segunda componente cambia su signo.			
Transformación: $T(x,y)=(y,-x)$			

$(2,3)$	$(3,4)$	$(2,2)$	$(1,1)$
$(13,-5)$	$(3,24)$	$(4-4,2\cdot 2\cdot 2)$	___ , ___
$(194,144)$	___ , ___	___ , ___	$(-1,-1)$
___ , ___	$(3,864)$	$(-8,16)$	$(-2,-2)$
Explicación…			
Transformación…			

<table>
<tr><td>Explicación geométrica</td><td>Transformación:</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Actividad 3.

Según las situaciones anteriores ¿qué es para ti una Iteración?

Actividad 4.

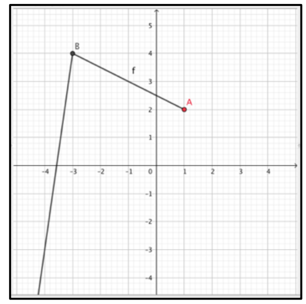
Completa el cuadro y construye en la “hoja de cálculo” (GeoGebra) un programa que realice iteraciones de un punto con la transformación dada a continuación:

$$T(x, y) = (x, y)^2 = (x^2 - y^2, 2xy)$$

	A	B	C
1	P	1	2
2	P*	=B1*B1-C1*C1	=2*B1*C1
3	P**		
4	P***		
5	P****		
6	P*****		

Además, con la opción “=Segmento(,)” puedes trazar los segmentos entre P y P*, P* y P**, así sucesivamente hasta obtener todos los segmentos.

	A	B	C	D
1	P	1	2	
2	P*	-3	4	=Segmento((B1, C1), (B2, C2))
3	P**	-7	-24	
4	P***	-527	336	
5	P****	164833	-354...	
6	P*****	-982...	-116...	



Enseguida, mueve con la opción el punto A, notarás que los demás puntos cambian de posición ¿por qué sucede esto?

Actividad 5.

Misión Bomba.

Nuestro héroe Mr. G., se encamina en otra de sus importantes misiones. En una región inmensa tiene que encontrar unas bombas dejadas por Caosis, un científico malvado, que tiene como objetivo destruir el mundo. Cada bomba explotará de forma inminente si alguien accidentalmente la encuentra.

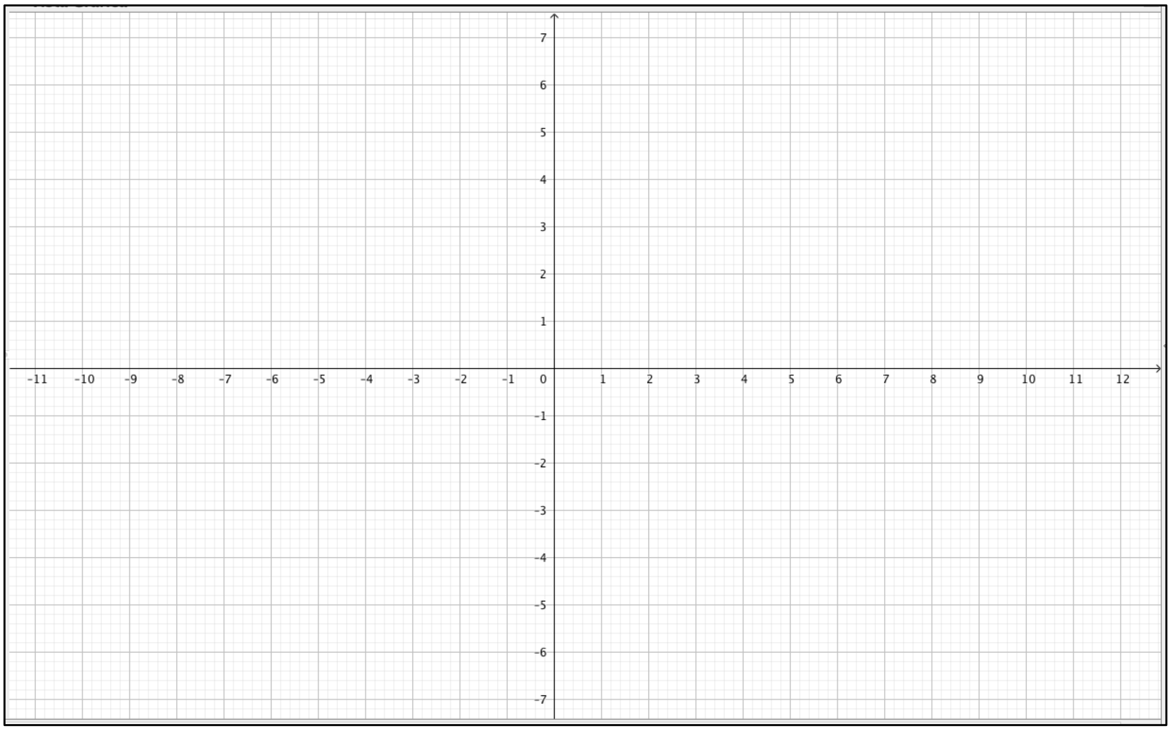
Con lo que no contaba Caosis era que, Mr. G. tenía una inteligencia increíble y descubrió la forma de encontrar las bombas, gracias a los Números Laterales. Por suerte, nuestro héroe construyó un poderoso radar llamado "**El iterátor**" que lanza unos rayos especiales, e iterando cada punto por donde se desplace nuestro héroe $P, P^{*}, P^{**}, P^{***}, \ldots$, intentarán encontrar como brazos estirados, cada una de las bombas, y ¡si tiene suerte! revelaran una ruta precisa que lleva hacia alguna de estas.

Para estar seguro, Mr. G. debe moverse por el lugar y comprobar que el rayo muestra siempre el mimo punto, a esto le llama punto **convergencia**.

Pero Mr. G. al encontrar cada bomba, sabe que puede haber más de ellas cerca, así que se asegura y traza en un mapa, con distintos colores, la región por donde **El Iterátor** indique cada bomba. Así, nadie correrá peligro, y Mr. G. pueda ordenar su desactivación inmediata llamando a su amigo Fractus.

A veces, Mr. G. y Fractus tendrán que utilizar mapas, cada vez más precisos, y en esto, los héroes necesitan de tu ayuda. ¡Algo extraño ocurre con los mapas!

Ayuda a Mr. G. y a Fractus dibujando el mapa con ayuda de El Iterator, usando la transformación $T(x, y) = (x, y)^2$.

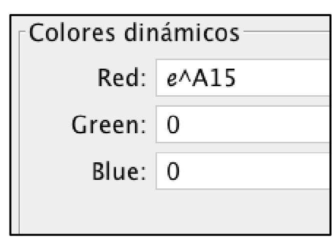


Indica con algún color los puntos por donde Mr. G se mueve y **El Iterator** encuentra una bomba.

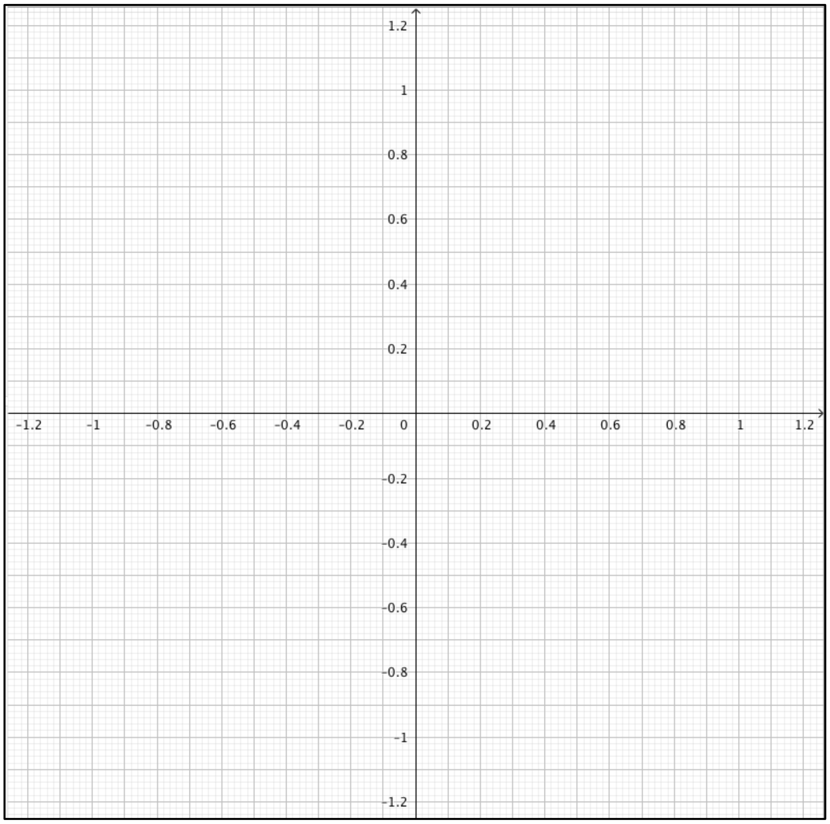
Actividad 6:

Pinta de una manera más específica en el plano los puntos. Ayuda: Oprime clic derecho sobre A y selecciona "Rastro". Observarás que **El Iterator** va dejando una estela por donde pasas.

Así mismo puedes colocarle una condición al rastro para que pinte de otro color. Clic derecho, Propiedades, Menú avanzado, Colores dinámicos, elige un color (rojo, verde, azul), Sobre el color ten en cuenta la casilla de la última iteración en la hoja de cálculo, por ejemplo, fue A15, por tanto, escríbela como muestra la imagen de la derecha.



A continuación, mueve el cursor por todo el mapa y dibuja en la siguiente cuadrícula, la imagen que obtuviste.

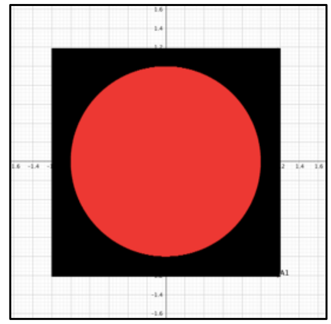


Anota a continuación tus observaciones.

11.3.6. Sesión 5: Fractus Fractalis

Nombre: ____Fecha: ______________

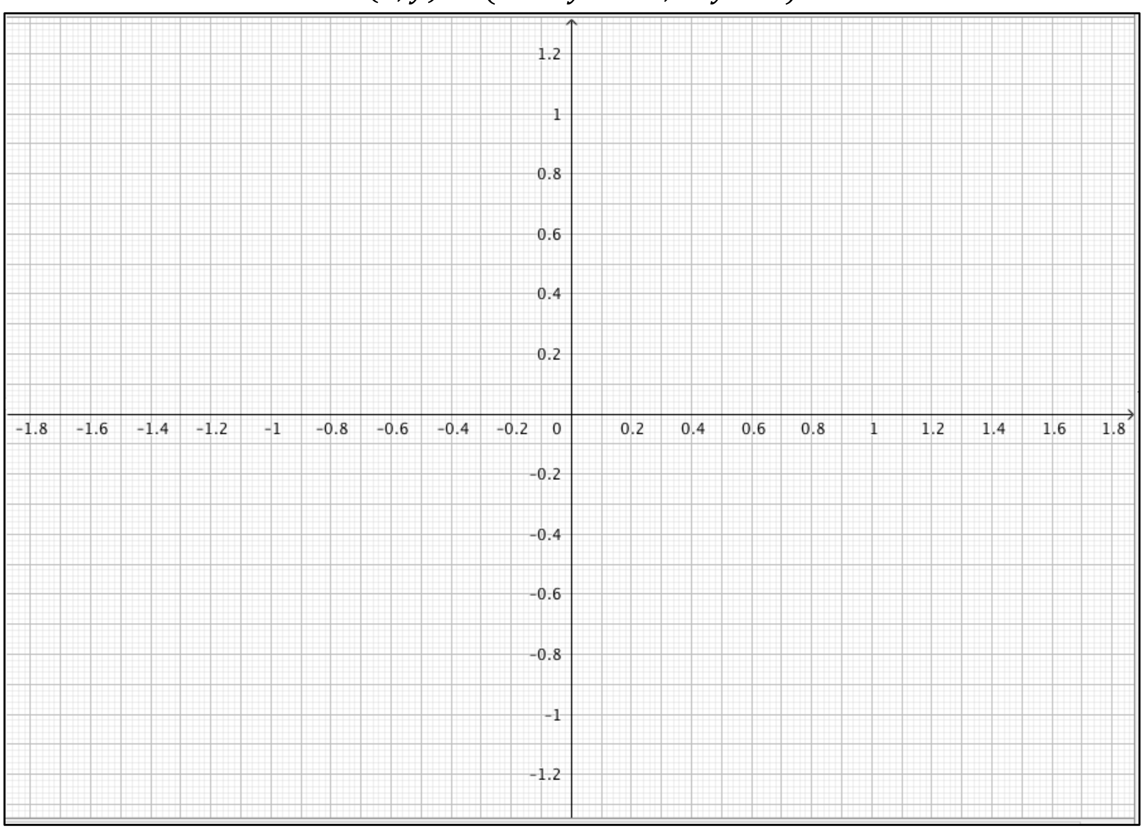
Nuestros héroes, el doctor Mr. G., Fractus y tú, lograron diseñar el primer mapa preciso de la bomba (imagen derecha) que se encontraba en $(0,0)$, ahora debemos encontrar el resto. Resulta que Mr. G. descubrió que, si sumamos un cierto tipo de Números Laterales a la **señal** del Iterator, nuestro detector encuentra otras bombas y el mapa se torna distinto. ¡Averigüemos como son!



Actividad 1.

La primera señal de forma de NL que encuentra Mr. G. es $\color{red}{Señal} = \color{red}{(-1,0)}$, por tanto, es necesario sumar este valor a la fórmula del software, quedando entonces:

$$T(x,y) = (x,y)^2 + \color{red}{Señal}$$
$$T(x,y) = (x,y)^2 + \color{red}{(-1,0)}$$
$$T(x,y) = (x^2 - y^2 \color{red}{-1}, 2xy + \color{red}{0})$$

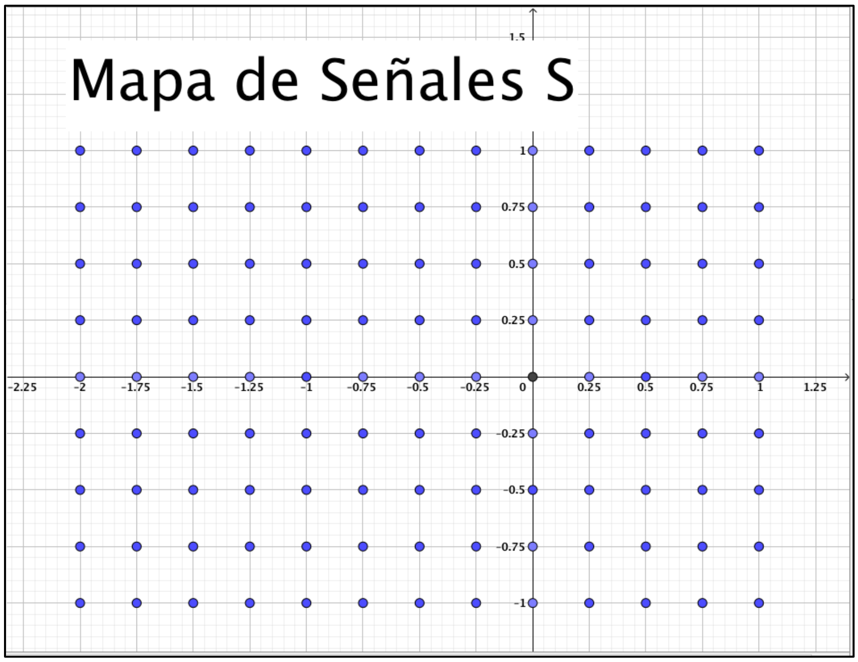


Ingresa esta fórmula a GeoGebra y realiza el mapa a continuación, con ayuda de la opción “Rastro”.

Actividad 2

Investiguemos a continuación de cuántas señales diferentes se pueden encontrar un mapa distinto.

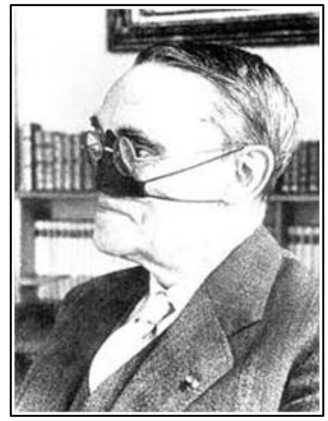
La siguiente región del plano, contiene algunos puntos de los cuales el docente tiene la imagen impresa correspondiente a la señal, debes realizar el mapa con la Señal indicada en GeoGebra e identificar qué imagen de las que tiene el docente coincide con la que te muestra el software.



Después, entre todos, deben armar el mapa completo de las figuras siguiendo la posición de cada Señal en el plano.

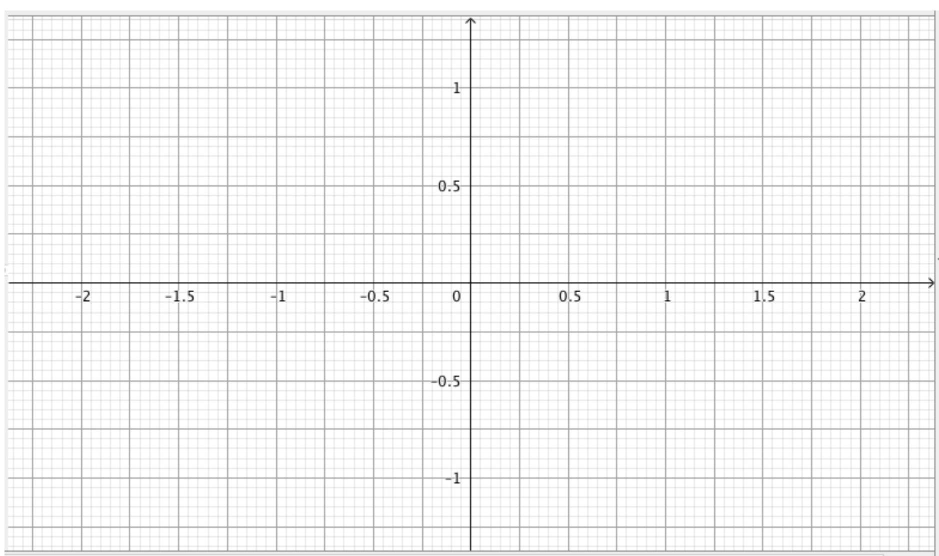
Como pudiste ya haber identificado, las formas de las figuras que vas creando con cada tipo de "Señal" se van volviendo más grandes y "compactas" (conexas), es decir, como si fueran de una sola pieza. Otras, por el contrario, son más pequeñas y sus partes son separadas, casi como si fuera polvo (polvoroso). ¿Por qué ocurre esto? ¿Qué las vuelve de este modo?

Las figuras que acaban de construir están formadas por miles de iteraciones de operaciones de la forma $(x,y)^2 + S$ que solo un ordenador puede hacer rápidamente. No es coincidencia, que éstas figuras coincidan con algunas formas fractales que se conocen como **“Conjuntos de Julia**”, en honor a un matemático francés llamado **Gaston Julia** (1893-1978), quien investigó las iteraciones y sus propiedades al mismo tiempo que el también matemático **Pierre Fatuo** (1878- 1929) a principios del siglo XX. Lamentablemente, en ese entonces, ellos no disponían de ordenadores y por tanto nunca pudieron observar lo que estaban investigando de forma gráfica, ya que el ordenador no se había creado hasta mediados de ese siglo.



Actividad 3.

Traza en el siguiente mapa los puntos que generaron figuras “conexas”, de los Conjuntos de Julia impresos.



Une los puntos marcados y colorea el mapa.

Mr. G y Fractus te agradecen que hallas completado la misión, has encontrado el lugar donde están todas las bombas, gracias a los Conjuntos de Julia podemos hacer un mapa general de toda la región donde se encuentran las bombas que puso Caosis.

Abre el programa que se encuentra adjunto, como observarás, muestra la misma figura que acabaste de realizar, pero de forma más precisa. Este software analiza cada punto S del **mapa de señales** a una distancia muy pequeña y pinta de color rojo los puntos que forman figuras conexas y los que no los deja en negro, de forma similar a como hiciste anteriormente con las figuras a través de iteraciones, pero a mucha mayor velocidad, este programa identifica cada punto y forma a su vez una nueva figura llamada **"conjunto M"**, en honor al matemático estadounidense **Benoit Mandelbrot** (1924- 2010), conocidos por sus trabajos en este campo en los años 70, gracias al surgimiento del ordenador, nos adentramos a una nueva geometría, la Geometría Fractal. Fue gracias a Mandelbrot el termino Fractal.

Actividad 4.

Escoge una de las figuras hechas anteriormente, por ejemplo, $S = (-1,0)$, contesta las siguientes preguntas.

¿Has observado el borde de esta figura? ¿Qué ocurre si te acercas para detallar mejor su borde? ¿Es posible que puedas dibujarlo con el mayor detalle posible? Usa tu ordenador.

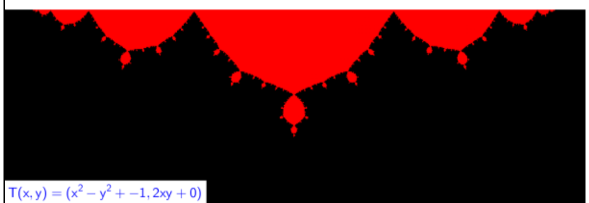
¿La figura es de una sola pieza? De ser así, acércate en las uniones y comprueba.

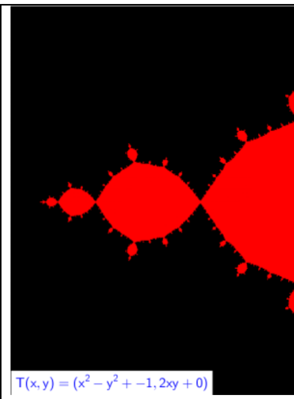
¿Si colocamos un espejo en alguna parte de la figura, cuál es el mejor lugar para colocarlo, de tal forma que se observe a través del espejo la parte faltante de la figura? Dibújala junto con el lugar donde pondrías el espejo

Actividad 5.

Dibuja la parte faltante y define con tus palabras cada concepto

<u>Simetría axial</u>

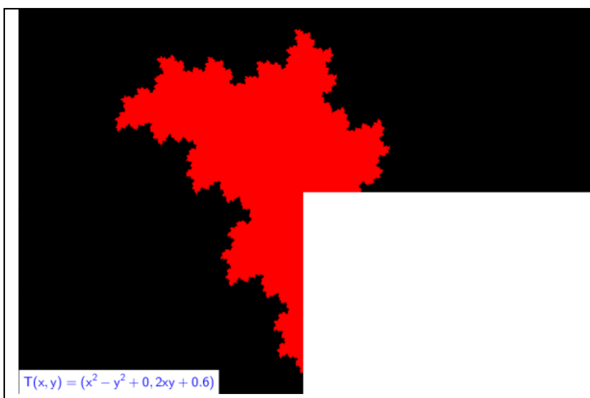


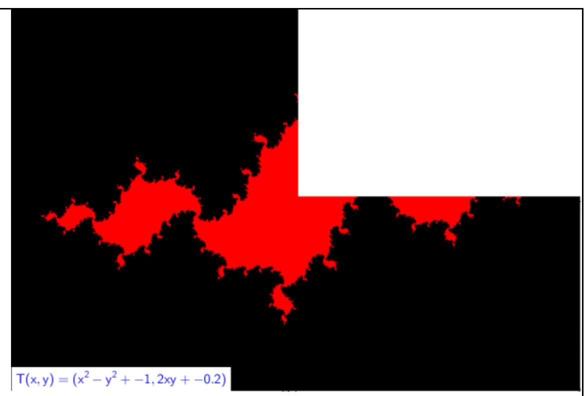


Explicación…

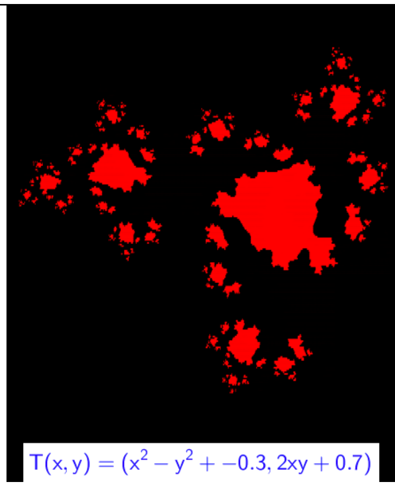
Este fractal tiene simetría axial o simetría espejo ya que solo basta con dibujar la parte faltante de la misma forma, como reflejo.

<u>Simetría de rotación.</u>

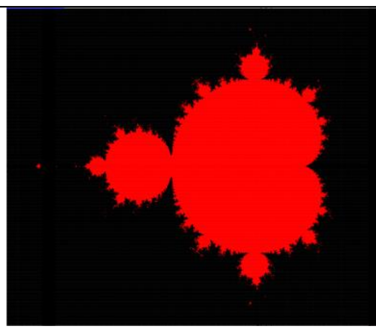


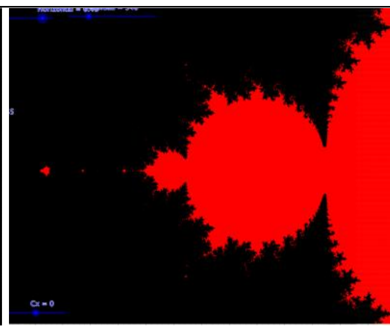


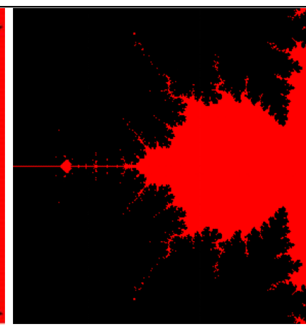
Simetría de ampliación y traslación



Similaridad o Autosimilar







Explicación…

Según lo explicado por el profesor ¿Todos los “conjuntos de Julia” tienen características de simetría? Por ejemplo, ¿Todos son autosimilares?

Actividad 6.

Rompecabezas

Para Pensar:

¿En qué dimensión se encuentra un fractal? ¿Qué es un Fractal?

11.3.7. Sesión 6: Dimensión Fractal

Nombre: ____ Fecha: ___________________

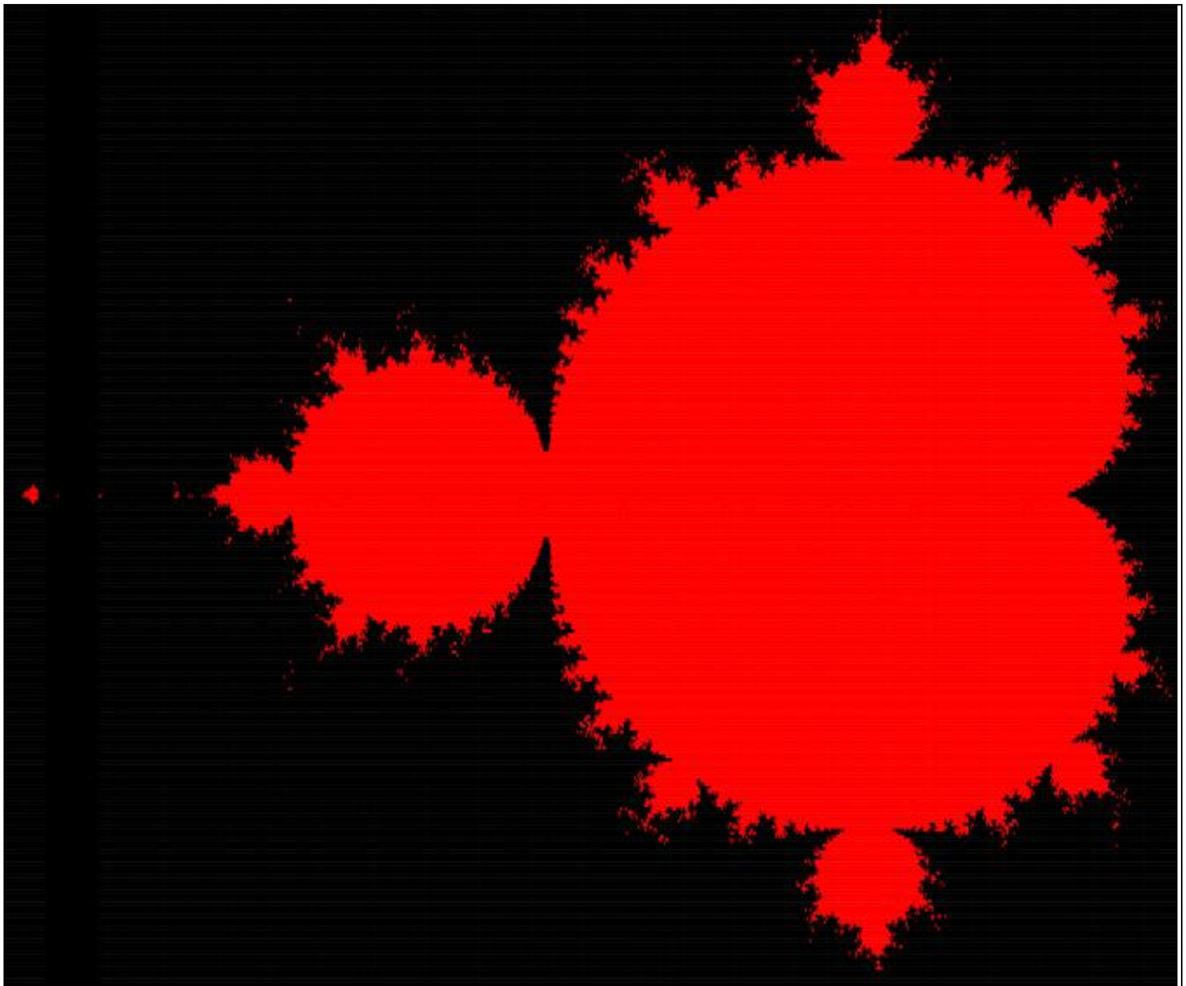
En la sesión anterior se concluyó dejando en el ambiente la siguiente cuestión:
¿Qué dimensión tiene un fractal? y en definitiva ¿qué es un fractal?
Primero que todo, para responder la primera pregunta, es necesario comprender que se entiende por dimensión.
En términos cartesianos una dimensión, también llamada dimensión topológica, es el número mínimo de ejes coordenados que se necesitan para ubicar cualquier punto de un objeto. Esto es, por ejemplo, para un punto, no necesitamos ejes, por tanto, tiene dimensión cero. Para una línea recta solo es necesario de un solo eje de coordenadas para hallar la posición de cualquiera de sus puntos, por tanto, tiene dimensión uno. Para un cuadrado, triángulo o círculo se necesitan de dos ejes para representar cualquier punto de la figura, por tanto, tiene dimensión dos. Por último, los objetos físicos del salón de clases tienen dimensión tres ya que se requiere de tres ejes para representar la posición en cualquier punto en algún momento.
Ahora, la dimensión Fractal resulta que no es entera, Félix Hausdorff (1868-1942) un matemático alemán en 1918 publicó un artículo donde demostraba que los fractales tienen dimensión fraccionaria, es decir, un fractal no tiene ni una, ni dos, ni tres dimensiones, sino que su dimensión puede ser 1.5 o 2.4, etc. Entonces, ¿cómo hallarla?
Usemos un método llamado "Conteo de Cajas" (en inglés Box Counting, también llamada dimensión Minkowski- Bouligard). Consiste en tomar un fractal cualquiera dividirlo en cuadrados de cualquier tamaño, se cuentan cuántos cuadrados son necesarios para cubrir todo el fractal (Eo), se plante

a el patrón de escala ($1/S$) (como se va a dividir cada cuadrado) y se vuelve a repetir el proceso de conteo escala más pequeña (Ep), con estos datos, resolvemos el siguiente algoritmo.

$$Dimensión\ F = \frac{\log\left(\frac{Ep}{Eo}\right)}{\log S} = \frac{\log Ep - \log Eo}{\log S}$$

Actividad.

Halla la dimensión del conjunto M:



Para responder la segunda pregunta, es necesario entonces tener en cuenta los elementos de un fractal:

S_ _ _ _ _ _ _ _, S_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ y D_ _ _ _ _ _ _ _ _

Actividad 2.

Construye tú mismo una definición de Fractal

Actividad 3:

Con tus propios conocimientos aprendidos en estas sesiones intenta encontrar o descubrir un nuevo conjunto que no se halla hecho en clase, usa GeoGebra para ayudarte.

11.4. Anexo 4: Test Final

Nombre: ____ Fecha: __________________

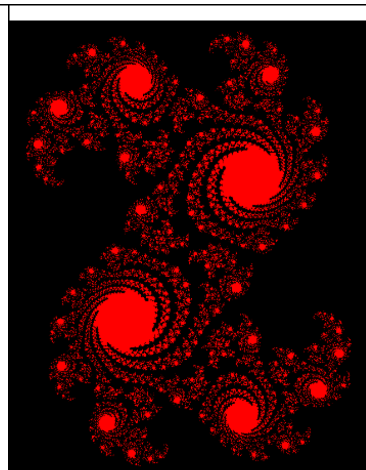
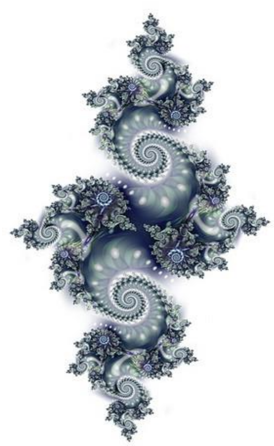
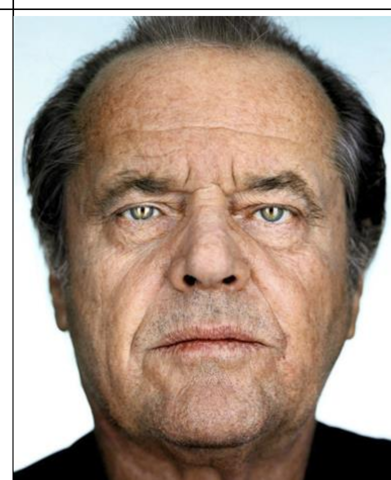
1. ¿Qué entiendes por simetría?

2. Explica el significado las definiciones de las siguientes palabras

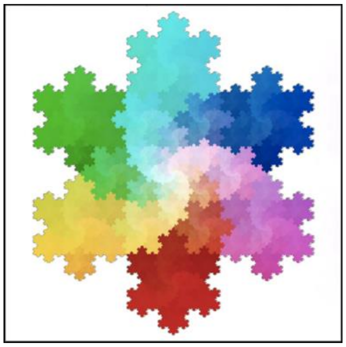
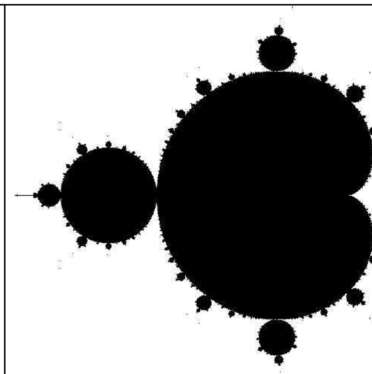
Dilatación	
Homotecia	
Rotación	
Traslación	
Autosimilitud o Similaridad	
Dimensión	
Fractal	

3. ¿Qué objetos has visto en la vida real que tenga algún tipo de simetría? (dibuja 3)

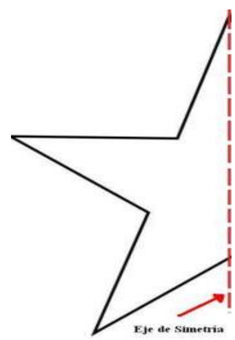
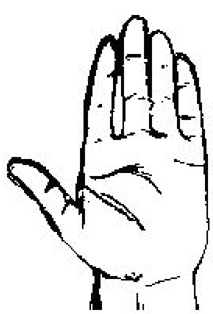
4. Muestra en qué figuras se encuentra presente la simétricas Axial y traza sus ejes.

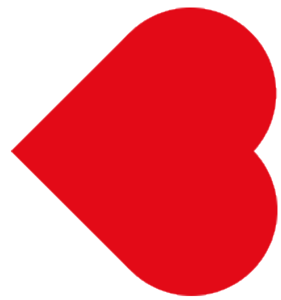
5. Observa las imágenes e identifica que tipo de simetría tienen

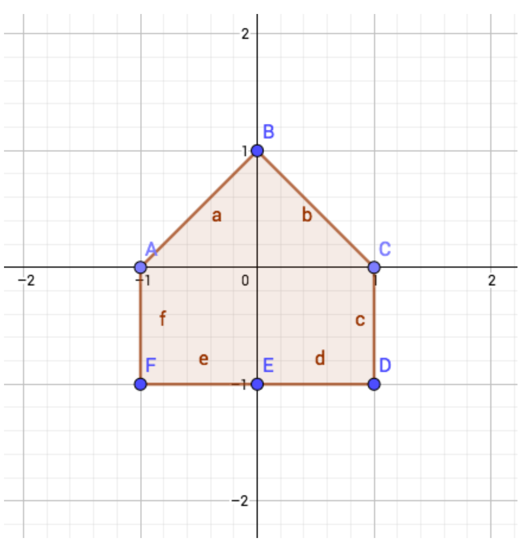
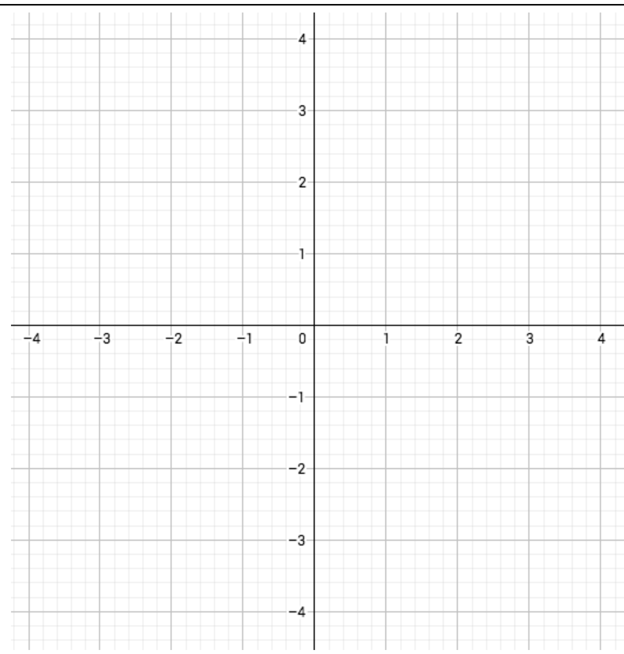
6. En la parte opuesta (izquierda o derecha) de las figuras dibuja su reflejo

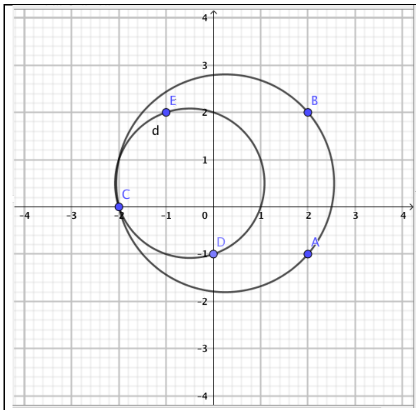
7. Completa la tabla rotando las imágenes

180º	0	-90º
		
		

8. Realiza la Homotecia (al doble) a los lados de las siguientes figuras

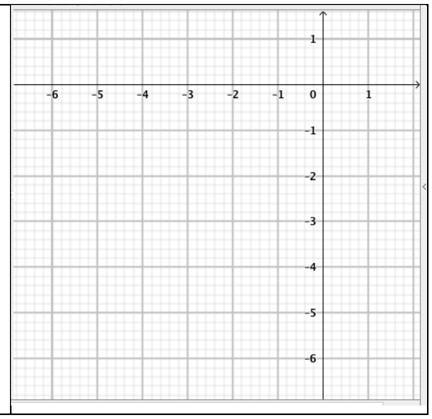
Figura 1	Figura 2
	

9. Realiza la transformación de la siguiente figura



$T(x, y)$
$= (x, y) + (-2, -2)$

(u, v)
$= (\qquad , \qquad)$



Se puede entonces concluir que la transformación T de números Laterales con la operación **suma** da como resultado en el ***plano u-v***:

a) Una Rotación
b) Una Traslación
c) Una Dilatación

Porque…

10. Medir con transportador y regla el ángulo y el tamaño de cada NL a continuación, completar la siguiente tabla y responder las siguientes preguntas.

Número lateral	Tamaño	Ángulo
A = (3 , 1)		
B = (1 , 4)		
A*B = (,)		

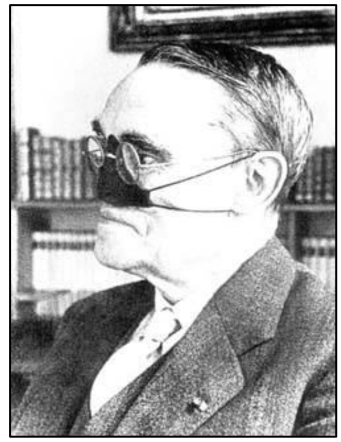
a. ¿Qué relación encontraste entre los tres ángulos de la tabla? ____________________
____

b. ¿Qué relación hay entre los tamaños de los NL?________________________________
____

c. Describir un método que permita multiplicar NL geométricamente______________
____
____

11. Sabes quienes fueron los siguientes personajes, relaciónalos con una flecha en las imágenes y menciona algunos datos que sepas sobre ellos.

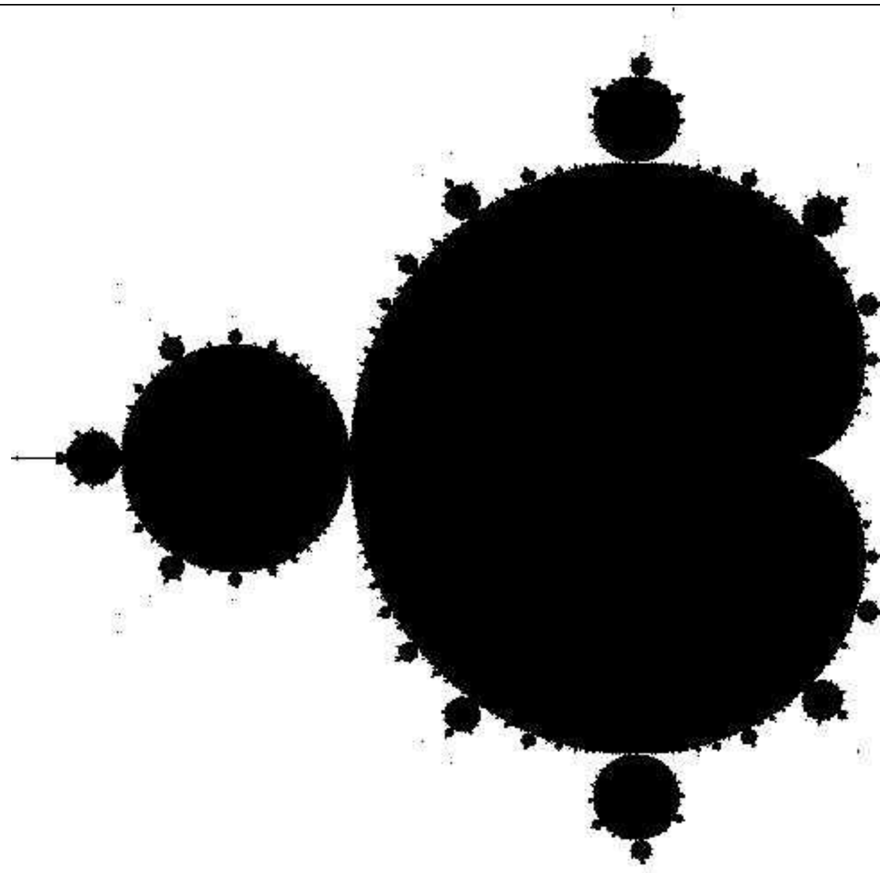
Pierre Joseph Louis Fatou
(1878, 1929)



Gaston Maurice Julia
(1893, 1978)

Benoît Mandelbrot
(1924—2010)

12. Observa la siguiente imagen, menciona sus características y propiedades



11.5. Anexo 5: Programación en Excel de un conjunto de Julia y Mandelbrot

Por medio de la opción Visual Basic en Excel, se inserta un formulario donde se describen las características de lo que se desea que nos pregunte el programa para graficar el fractal. En la red se consiguen varios tutoriales acerca de cómo construir un formulario, por cuestiones de espacio se deja de consulta al lector los detalles.

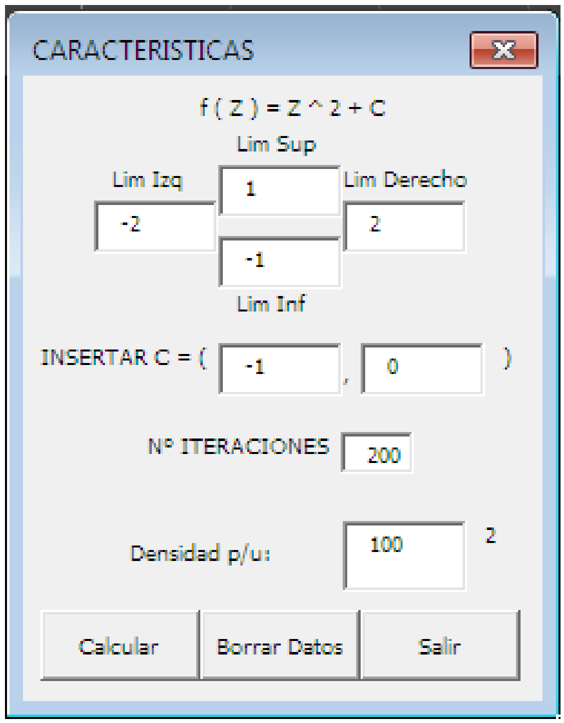


Ilustración 45: *Formulario en Excel.*

Fuente: *Elaboración propia.*

Luego se programa el botón de calcular con el siguiente código, lo cual genera los puntos en forma de lista:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim columna, x, y, zx, zy, c1, c2, c3, cont, den, xii, xi, yi, xf, yf, contpasos, puntosdib, puntosNoAtrEsc,
maxatra, cont1, maxesc As Long
Dim Fila, iter As Long
Range(Cells(2, 1), Cells(100000, 3)).Clear
Range("F2:F10").ClearContents
  xi = TextBox1 * 1
  xf = TextBox2 * 1
  yi = TextBox6 * 1
  yf = TextBox7 * 1
  den = 1 / (TextBox8 * 1)
```

```
    Fila = 2
    cont = 0
    cont1 = 1
    contpasos = 0 ' cuenta las iteraciones hechas
    maxatra = 0
    maxesc = 0
    puntosdib = 0   ' puntos dibujados o atrapados
    puntosNoAtrEsc = 0
    iter = TextBox3 * 1
xii = xi
Do While yi >= yf
    y = yi
   Do While xi <= xf
       x = xi
       y = yi
       cont = 1
       cont1 = 0
      While cont <= iter
          zx = x * x - y * y + TextBox4 * 1
          zy = x * y + x * y + TextBox5 * 1
          c2 = ((zx) ^ 2 + (zy) ^ 2) ^ 1 / 2
          c3 = ((zx - x) ^ 2 + (zy - y) ^ 2) ^ 1 / 2
            If c2 >= 2 Then
               cont = iter + 1
               cont1 = cont1 + 1
               If maxesc < cont1 Then
                 maxesc = cont1
               End If
            Else
               If c3 <= 0.00000001 Then
                   ActiveSheet.Cells(Fila, 2) = xi
                   ActiveSheet.Cells(Fila, 3) = yi
                   Fila = Fila + 1
                   cont = iter + 2
                   puntosdib = puntosdib + 1
                   cont1 = cont1 + 1
                   If puntosdib = 21000 Then
                        yi = yf - 1
                     End If
                   If maxatra < cont1 Then
                     maxatra = cont1
                     End If
               Else
                  x = zx
                  y = zy
                  If cont = iter Then
```

```
                ActiveSheet.Cells(Fila, 2) = xi
                ActiveSheet.Cells(Fila, 3) = yi
                Fila = Fila + 1
                puntosNoAtrEsc = puntosNoAtrEsc + 1
                puntosdib = puntosdib + 1
                If puntosdib = 21000 Then
                  yi = yf - 1
                  End If
              End If
              cont = cont + 1
              cont1 = cont1 + 1
            End If
          End If
          contpasos = contpasos + 1
      Wend
    xi = xi + den
    Loop
yi = yi - den
xi = xii
Loop
    ActiveSheet.Cells(2, 6) = contpasos
    ActiveSheet.Cells(3, 6) = puntosdib
    ActiveSheet.Cells(4, 6) = maxatra
    ActiveSheet.Cells(5, 6) = maxesc
    ActiveSheet.Cells(6, 6) = puntosNoAtrEsc
    ActiveSheet.Cells(7, 6) = TextBox8 * TextBox8
End Sub
```

A continuación, se construye una tabla de datos en dos columnas (que se pueden ocultar), según el conjunto de Julia que se desee, donde se almacenan los puntos a dibujar, se selecciona esta tabla y se le pide al programa realizar un gráfico de dispersión con la misma.

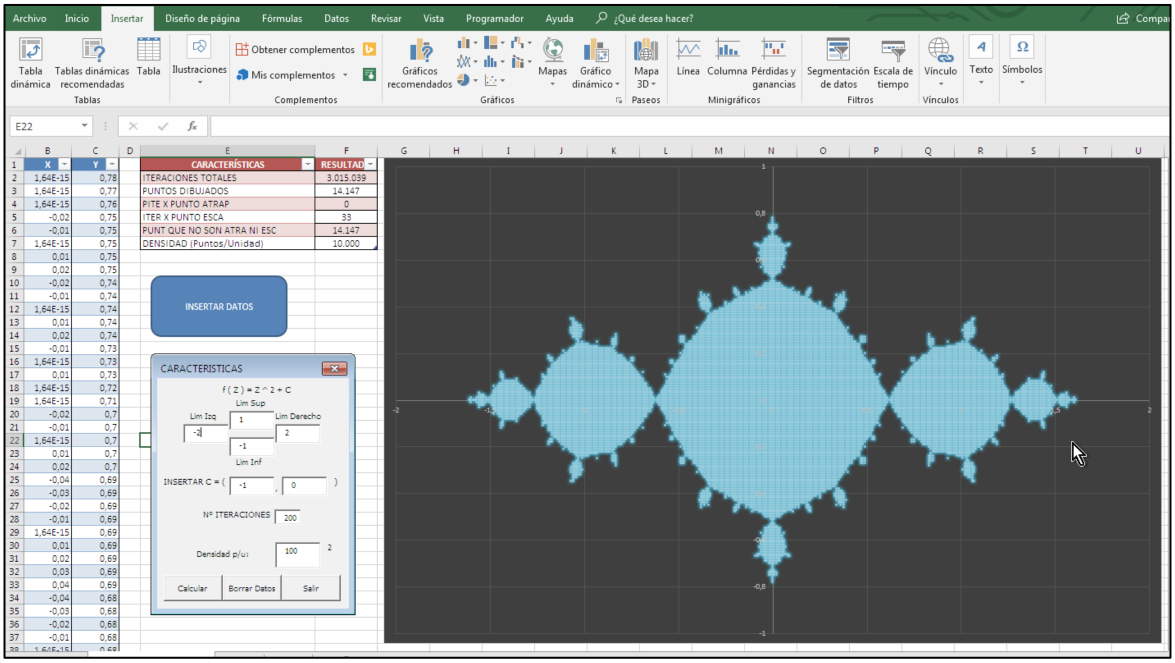


Ilustración 46: *Programa en Excel para conjunto de Julia.*
Fuente*: Elaboración Propia.*

Para el *conjunto de Mandelbrot* se realiza un procedimiento similar con el formulario y la programación de la hoja de cálculo.

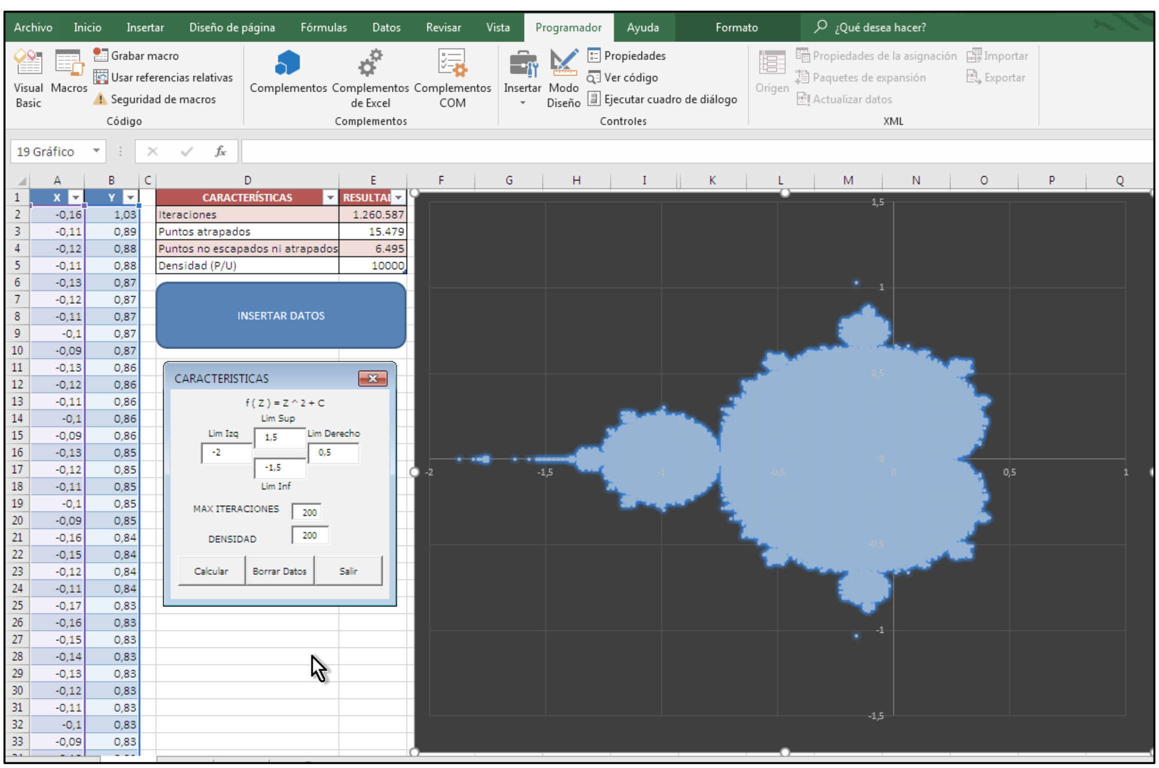


Ilustración 47: *Programa en Excel para conjunto de Mandelbrot.*
Fuente*: Elaboración Propia.*

El código de programación para el conjunto Mandelbrot es:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim columna, x, y, zx, zy, c1, c2, c3, cont, puntosdib, puntoNoAtrEsc, den, xii, xi, yi, xf, yf, contpasos As Long
Dim Fila1, Fila2, Fila3, iter, A, B, F As Long
   'Borrar la pantalla para hacer otro fractal
   Range(Cells(2, 1), Cells(100000, 3)).Clear
   Range("F2:F10").ClearContents
   xi = TextBox1 * 1
   xf = TextBox2 * 1
   yi = TextBox6 * 1
   yf = TextBox7 * 1
   den = 1 / (TextBox8 * 1)
   Fila1 = 2
   cont = 0 ' Numero de iteraciones por punto
   contpasos = 2 'cuenta todos las iteraciones que hace el programa
   iter = TextBox3 * 1
   puntosdib = 0   ' puntos dibujados o atrapados
   puntoNoAtrEsc = 0 'puntos ni atrampados ni escapados
xii = xi
Do While yi >= yf
   y = yi
  Do While xi <= xf
      x = xi
      y = yi
      A = 0
      B = 0
      cont = 1
     While cont <= iter
         zx = A * A - B * B + x
         zy = 2 * A * B + y
         c2 = ((zx) ^ 2 + (zy) ^ 2) ^ 1 / 2
         c3 = ((zx - A) ^ 2 + (zy - B) ^ 2) ^ 1 / 2
            If c2 >= 2 Then
            'Puntos ESCAPADOS
               cont = iter + 1
            Else
               If c3 <= 0.0000000001 Then
                  'Puntos ATRAPADOS
                   ActiveSheet.Cells(Fila1, 1) = xi
                   ActiveSheet.Cells(Fila1, 2) = yi
                   Fila1 = Fila1 + 1
                   cont = iter + 2
                   puntosdib = puntosdib + 1
```

```
                If puntosdib > 21000 Then
                  yi = yf - 1
                  End If
              Else
                A = zx
                B = zy
                If cont = iter Then
                  'Puntos que no escapan ni son atrapados
                  ActiveSheet.Cells(Fila1, 1) = xi
                  ActiveSheet.Cells(Fila1, 2) = yi
                  Fila1 = Fila1 + 1
                  puntoNoAtrEsc = puntoNoAtrEsc + 1
                  puntosdib = puntosdib + 1
                    If puntosdib > 21000 Then
                      yi = yf - 1
                    End If
                End If
                cont = cont + 1
              End If
            End If
            contpasos = contpasos + 1
        Wend
   xi = xi + den
   Loop
yi = yi - den
xi = xii
Loop
        ' TABLA DE PUNTUACIONES
        F = 5
        ActiveSheet.Cells(2, F) = contpasos 'contar cada iterción
        ActiveSheet.Cells(3, F) = puntosdib 'contar puntos dibujados junto con los no escapados ni atrapados
        ActiveSheet.Cells(4, F) = puntoNoAtrEsc 'Puntos que ni son atrapados si escapan pero se dibujan
        ActiveSheet.Cells(5, F) = TextBox8 * TextBox8 * 1 'Puntos evaluados al Lado de la figura.
End Sub
```

11.6. Anexo 6: Programación en GeoGebra de los conjuntos de Julia y Mandelbrot.

A diferencia de Excel y otros programas la programación en GeoGebra no se puede llevar a cabo en líneas de código. Para ello, GeoGebra cuenta con una herramienta fundamental, la hoja de cálculo. En ella, se pueden hacer operaciones con números reales o complejos y tiene casi las mismas funciones que el Excel, pero tiene una gran ventaja sobre éste y es su capacidad de gráfico.

Para programar, se comienza primero por agregar un punto en una celda de la hoja de cálculo, dígase $(1{,}1)$ en la celda A1. A continuación, las celdas consecutivas hacia la derecha, B1, C1, D1… se programan para que realice las iteraciones del punto A1, bajo una función $z^2 + c$, donde c es un punto con componentes x y y, por tanto se puede asignar un deslizadores que controlen estas constantes, sea Cx para la componente x, y Cy para la componente y de c. Todo esto, hasta obtener 20 o 30 iteraciones, suficientes para definir si el punto (Celda A1) converge o diverge.

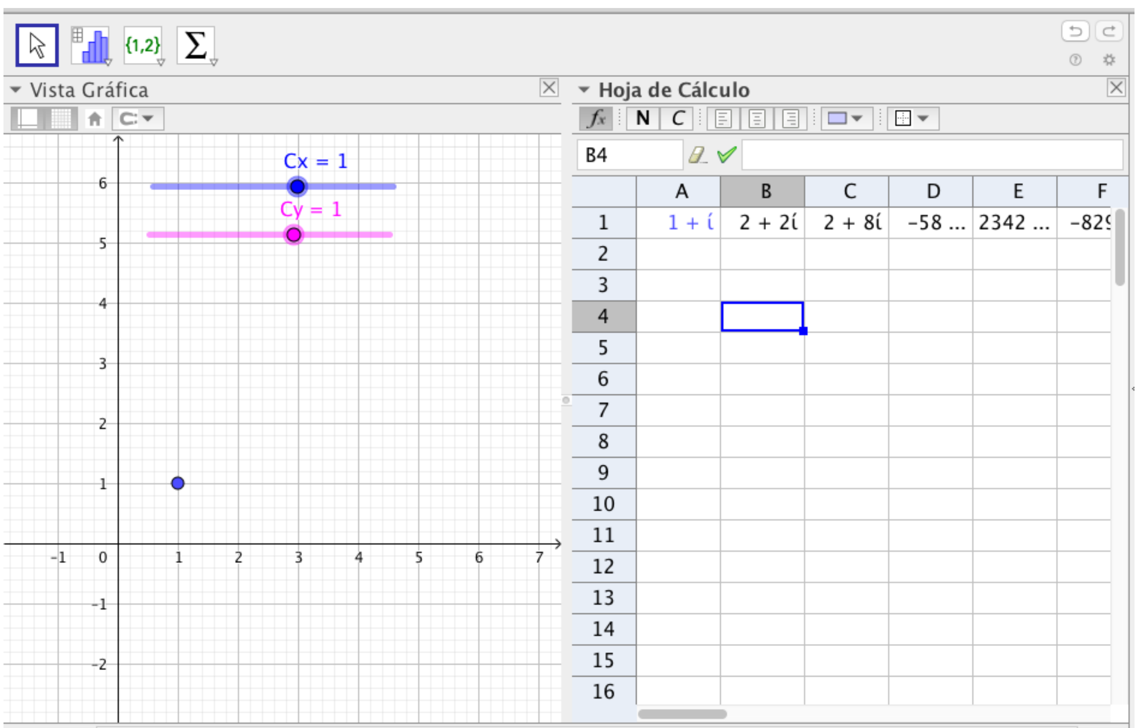


Ilustración 48: *Programando iteraciones en GeoGebra.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Para esto último, se programa la celda A1 en la opción "avanzado" para que pinte con la herramienta "trazo" el punto con un determinado color.

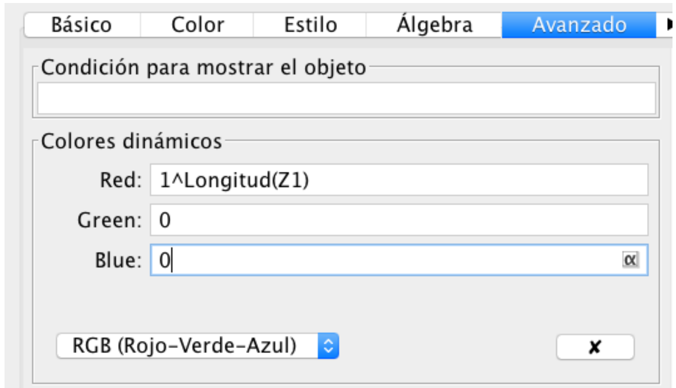


Ilustración 49. *Condicionar el color del trazo.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Así cuando el usuario deslice el punto de la celda A1 por el plano, dejara a su paso un trazo de color negro los puntos que diverjan en las iteraciones o de color rojo los puntos que converjan. Así se podrá pintar todo el plano en cuestión de minutos y obtener nuestro primer conjunto de Julia.

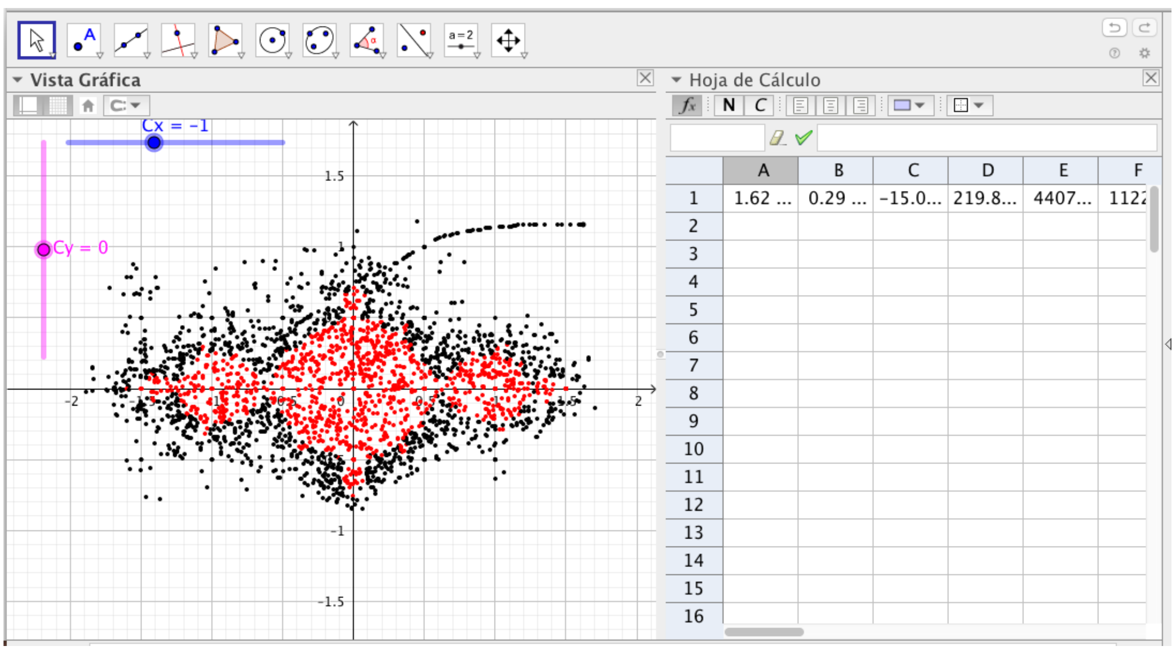


Ilustración 50: *Pintar el conjunto con un solo punto.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Sin embargo, este programa se puede mejorar, en vez de tener que pasar un solo punto por todo el plano se hace una especie de "brocha" con varios puntos haciendo que estos pinten con la misma orden.

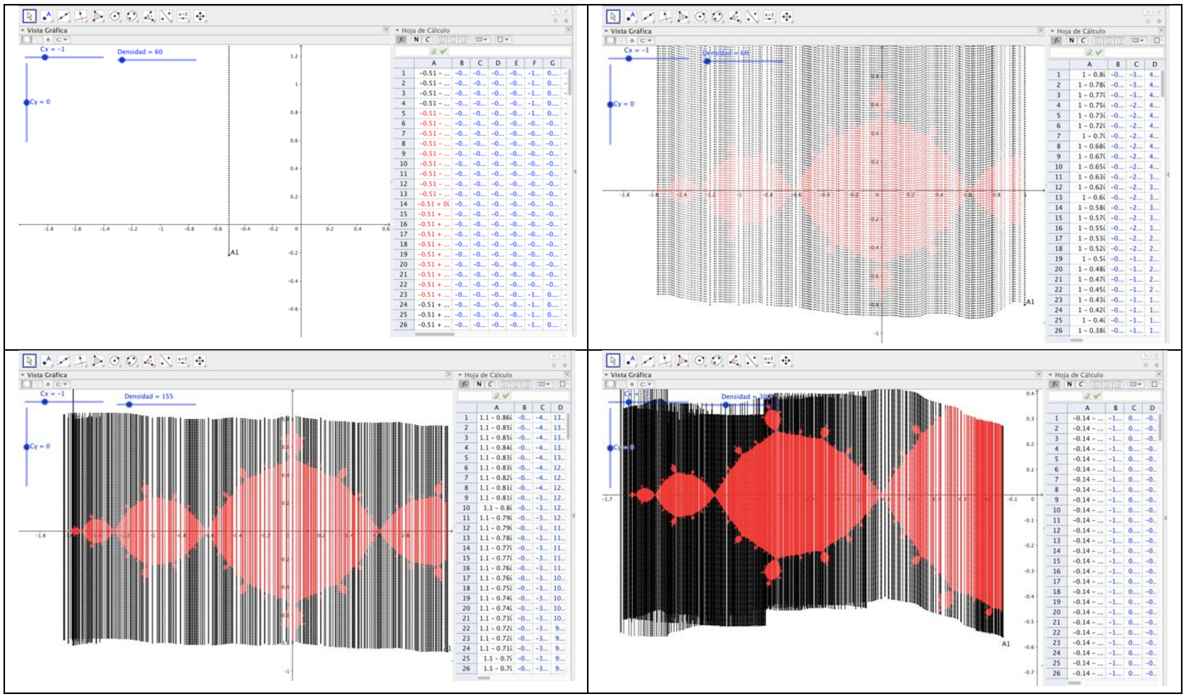


Ilustración 51: *Pintar el Fractal con 100 puntos.*
Fuente: *Elaboración propia.*

En las celdas continuas hacia debajo de la celda A1, es decir, A2, A3, ... se ubican los demás puntos -se pueden programar el número que se desee de estos. Se programan estas celdas para que estos puntos estén separados entre sí una distancia estimada, ya que cuando se hace a la imagen, esta se puede ver afectada por la separación de los puntos. Por eso se usa un nuevo deslizador, se le nombrara “densidad”. De nuevo, a cada uno de estos puntos se debe hacer las iteraciones correspondientes en las celdas continuas a la derecha y programar su rastro con color rojo.

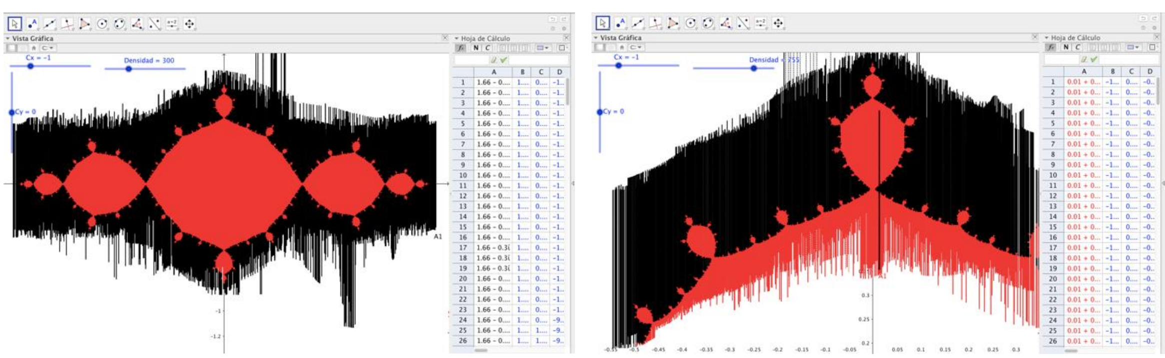


Ilustración 52: *Acercamiento en los conjuntos.*
Fuente: *Elaboración propia.*

Así, se obtiene una imagen más detallada de la figura. Sin embargo, esta se puede mejorar aún más. Los deslizadores, como se ha visto, permiten modificar la función al variar la constante c, o incluso aumentar y disminuir la distancia entre los puntos para que la imagen se vea más clara cuando se hacen acercamientos. Ahora, se puede agregar más deslizadores automáticos para que el programa mueva todos los puntos de una manera ordenada y pinte el fractal completo que se quiera sin errores de pulso.

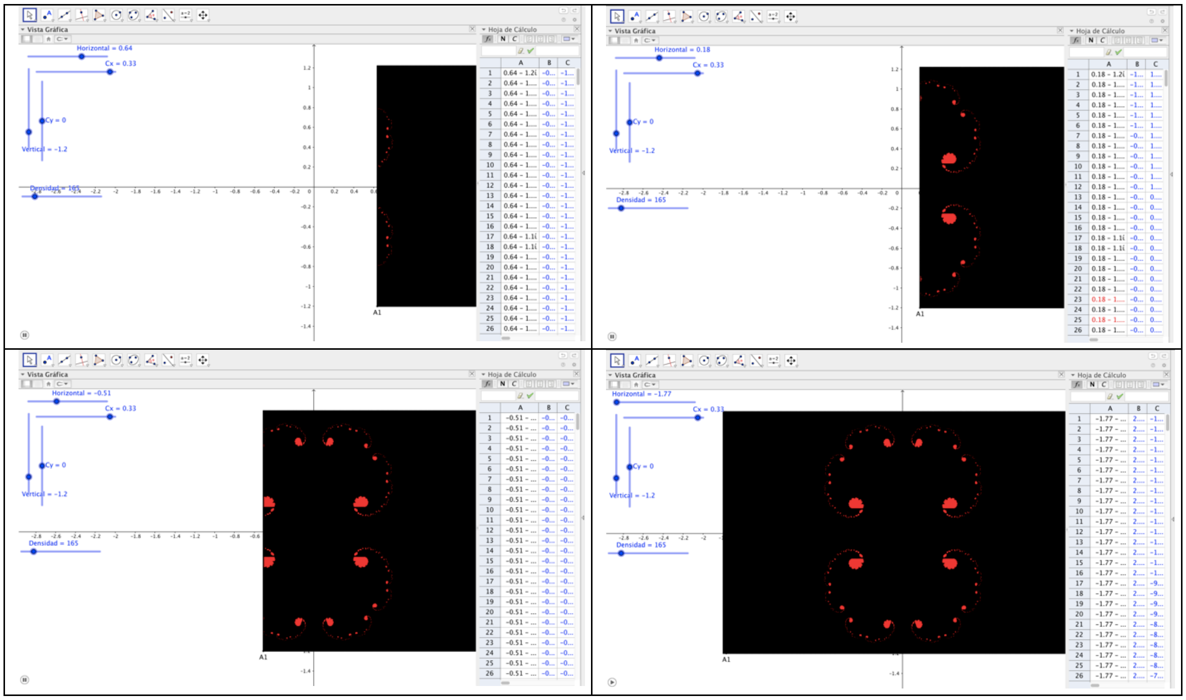


Ilustración 53: *Trazo automático por medio de deslizadores.*

Fuente: *Elaboración propia.*

11.7. Anexo 7: Rompecabezas Conjuntos de Julia hechos en GeoGebra.

Según lo visto en el Anexo 6, los conjuntos de Julia son fácilmente generados en GeoGebra. Con solo variar la constante c, de la función $z^2 + c$, por cualquier lugar del plano se generan un sin número de fractales. Debido a que el plano contiene infinitos puntos y no es posible generarlos todos, se realiza los fractales pasando por los siguientes puntos. La impresión de estas imágenes y la ordenación de ellas se detalla en la Ilustración 41.

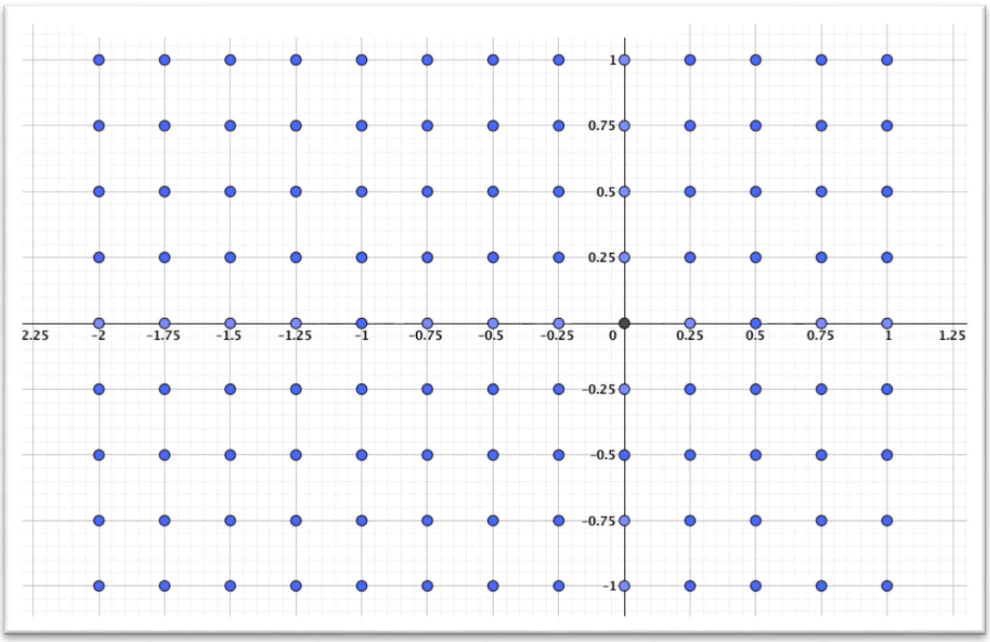
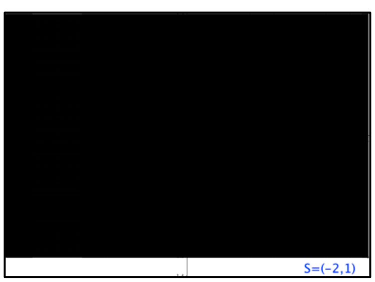
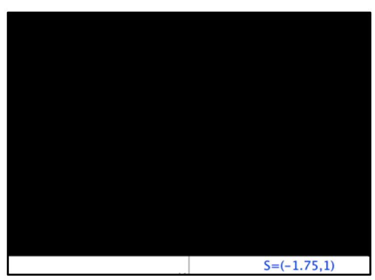
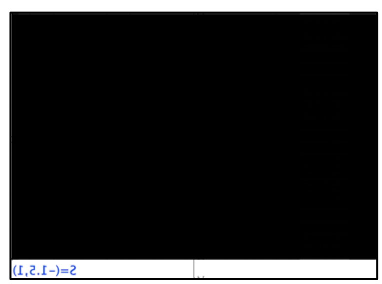
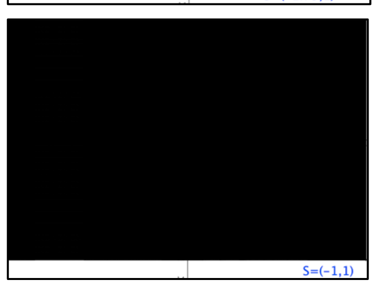


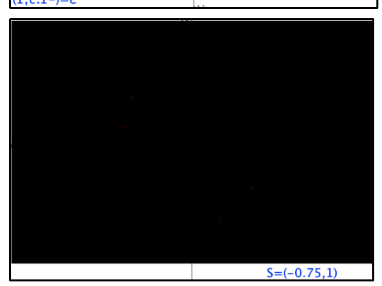
Ilustración 54*: Puntos en el plano* Πc.
Fuente: *Elaboración en GeoGebra.*

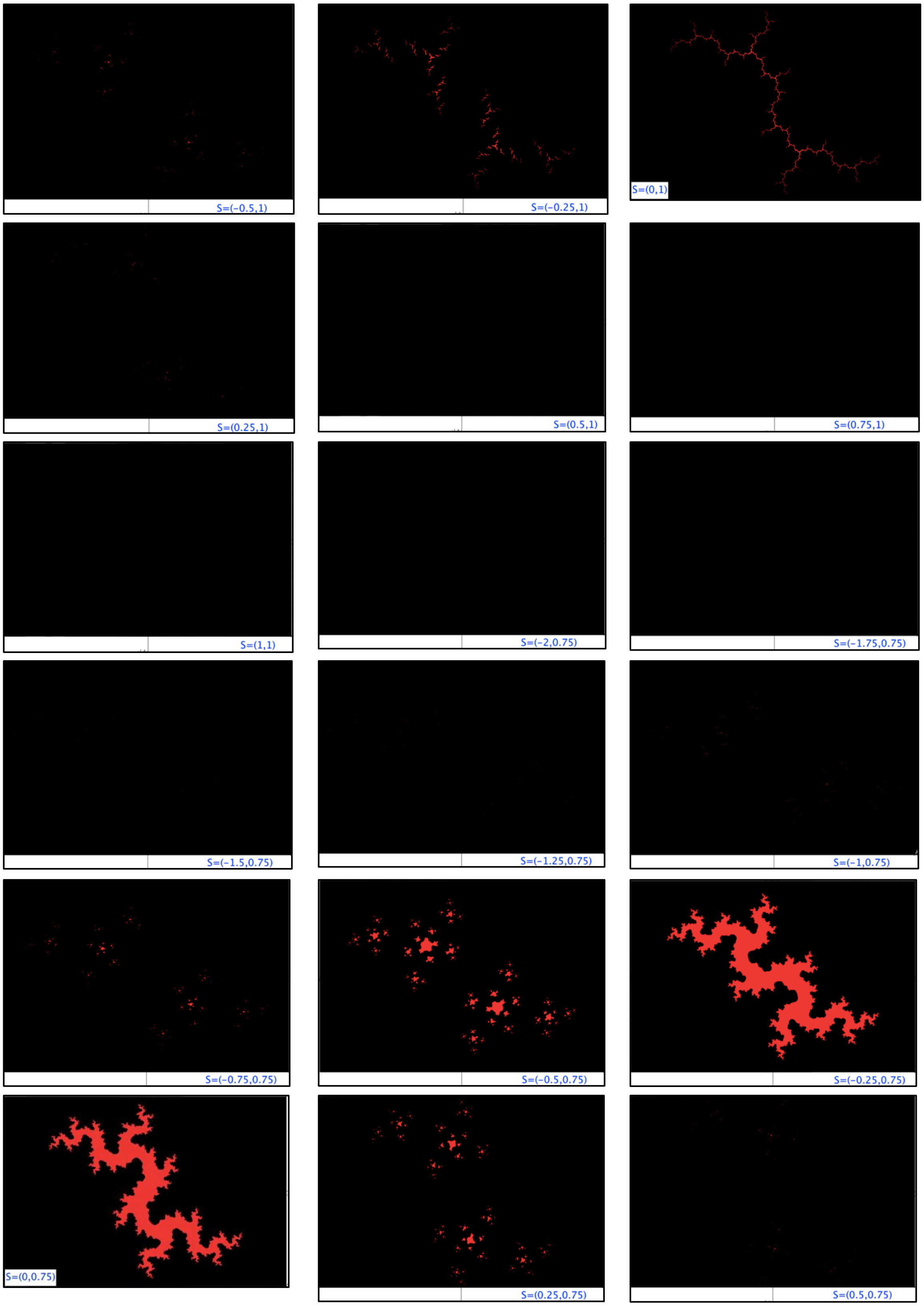


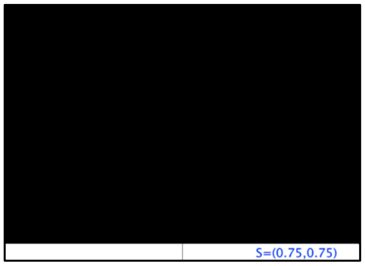
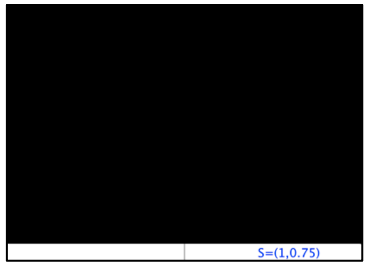
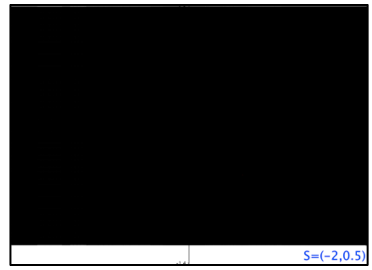
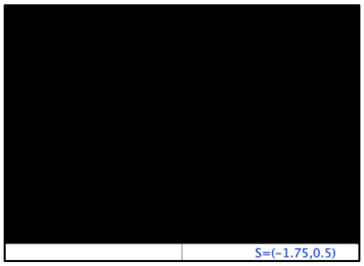
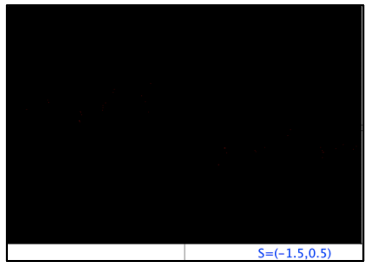
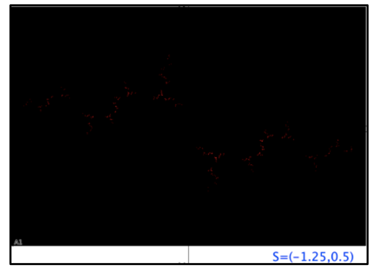
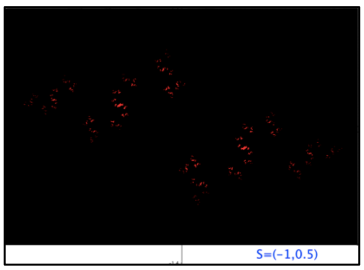
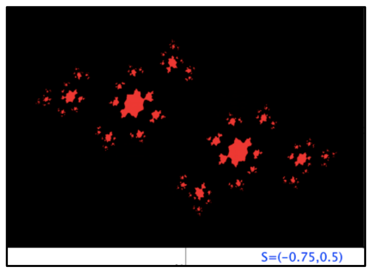
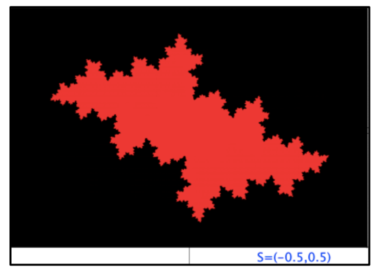
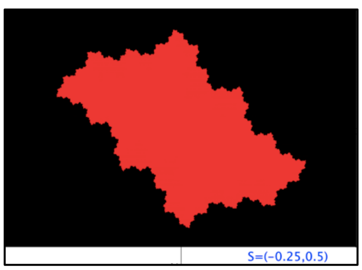
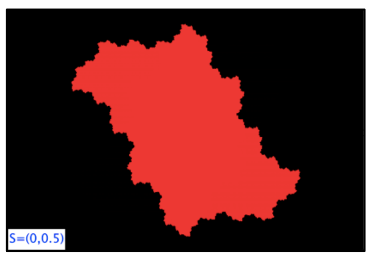
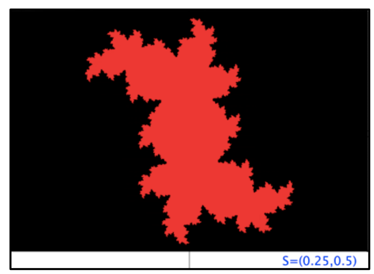
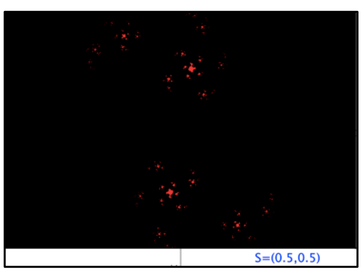
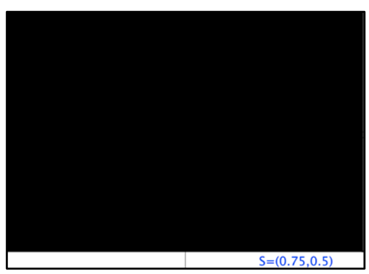


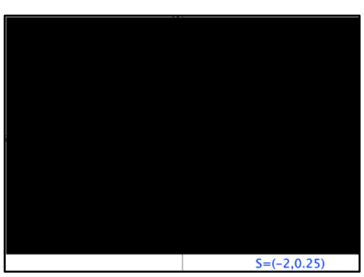
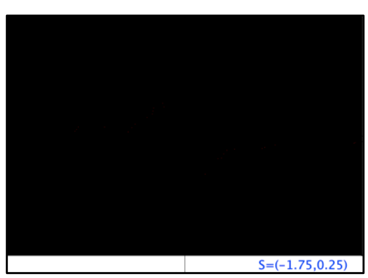
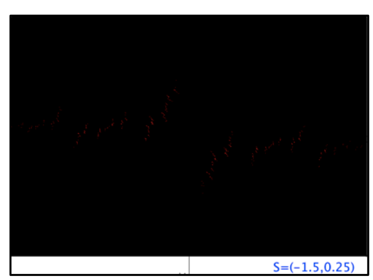


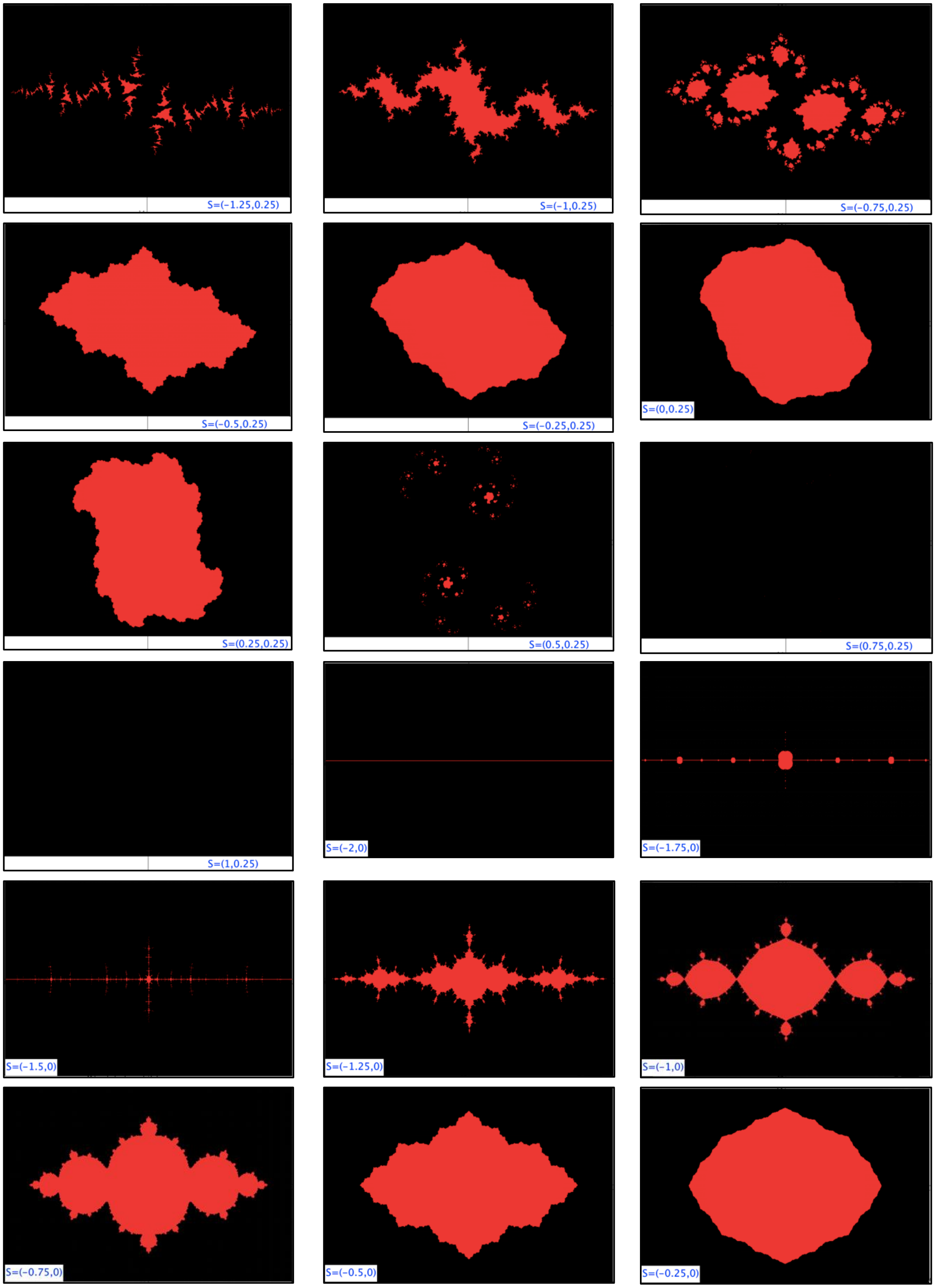


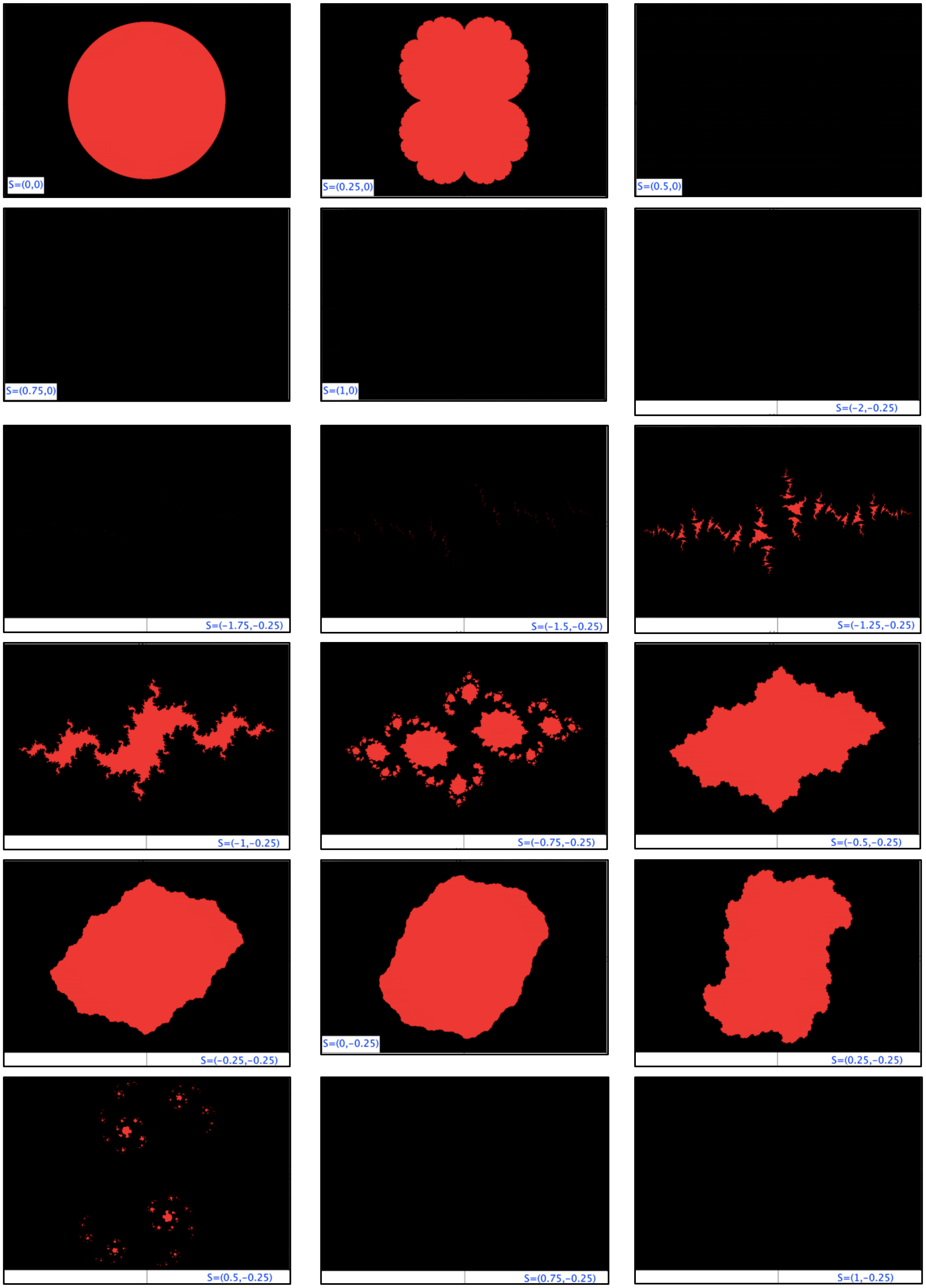


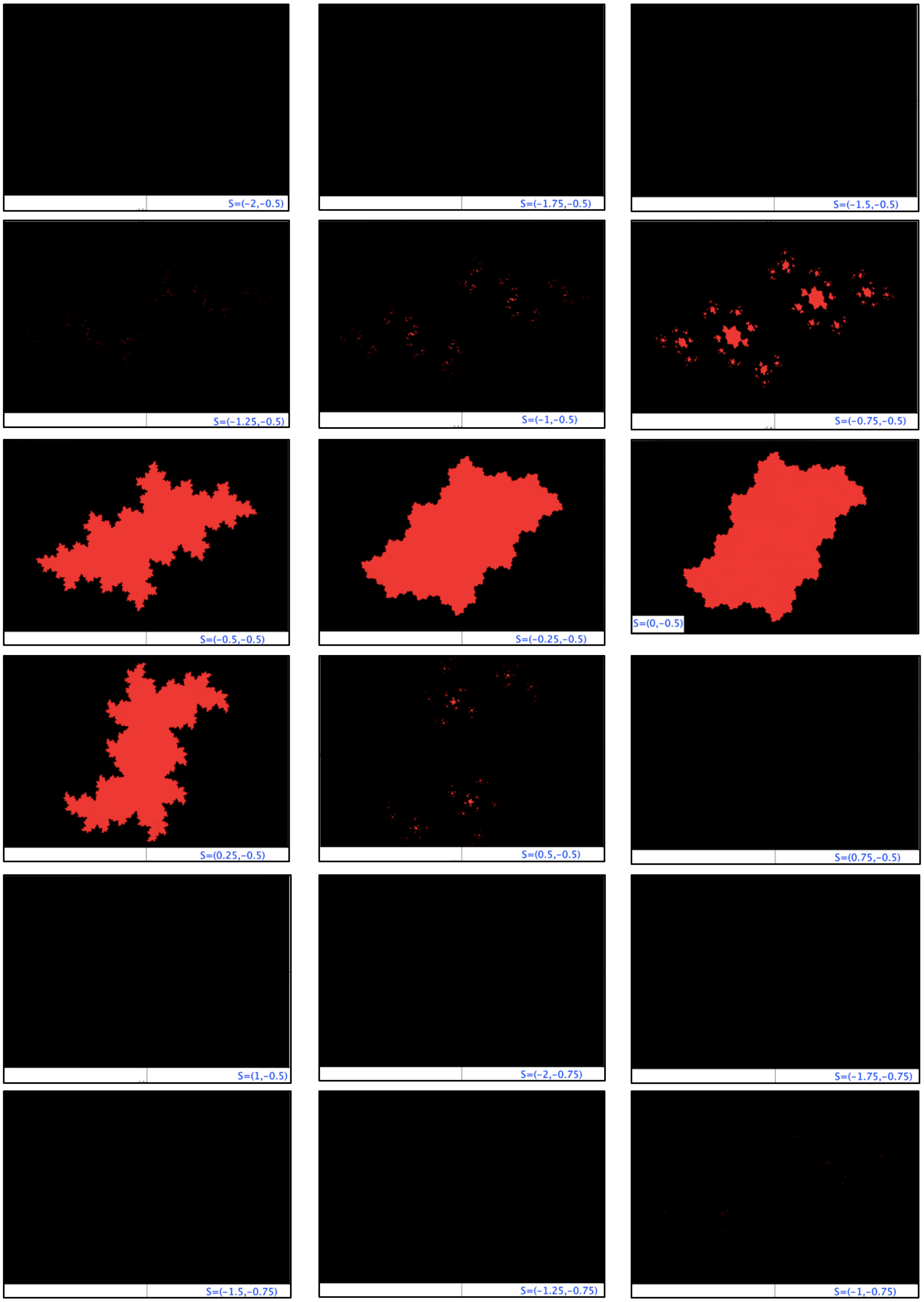

S=(−0.5,1)
S=(−0.25,1)
S=(0,1)
S=(0.25,1)
S=(0.5,1)
S=(0.75,1)
S=(1,1)
S=(−2,0.75)
S=(−1.75,0.75)
S=(−1.5,0.75)
S=(−1.25,0.75)
S=(−1,0.75)
S=(−0.75,0.75)
S=(−0.5,0.75)
S=(−0.25,0.75)
S=(0,0.75)
S=(0.25,0.75)
S=(0.5,0.75)

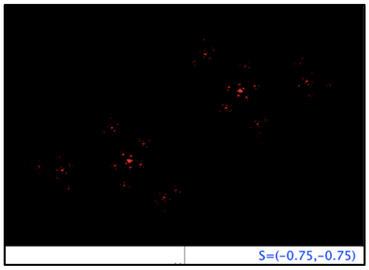
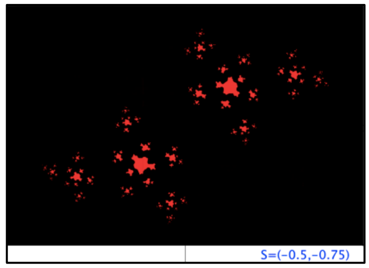
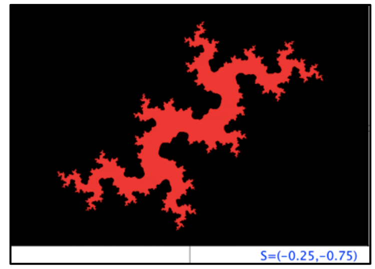
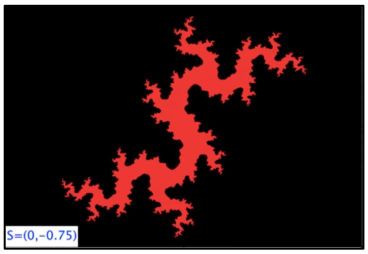
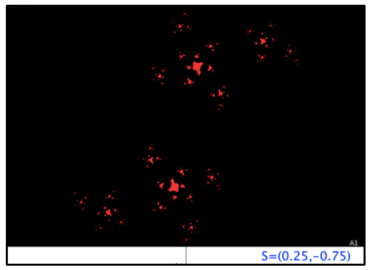
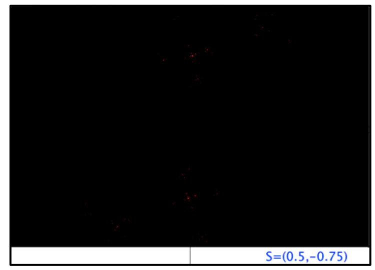
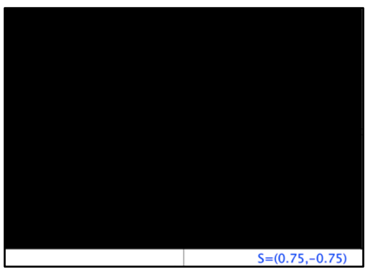
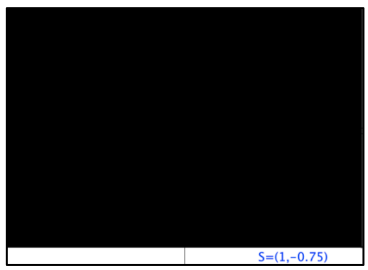
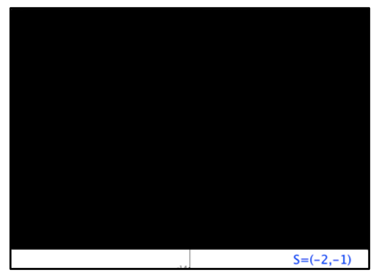
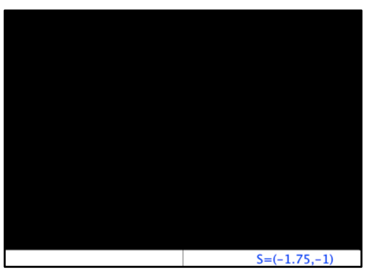
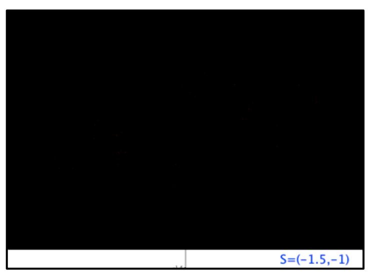
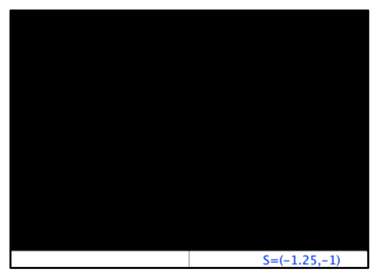
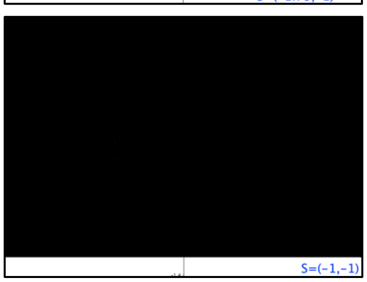
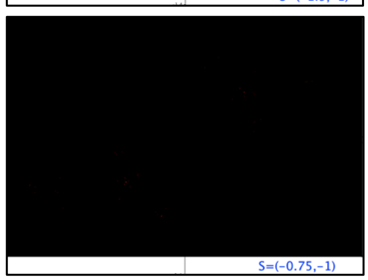
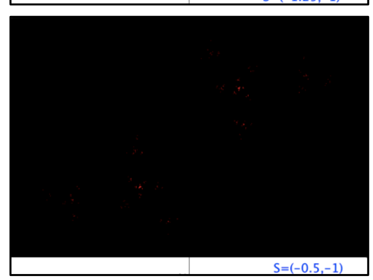
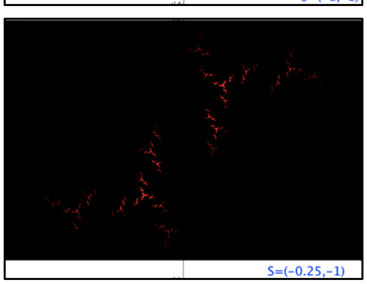
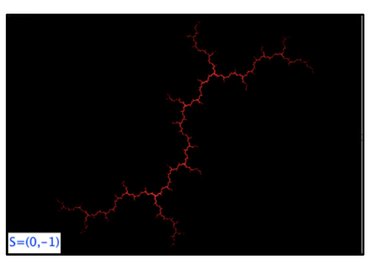
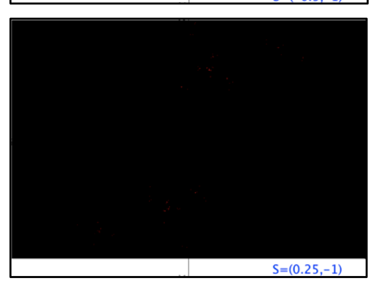

S=(0.75,0.75)

S=(1,0.75)

S=(−2,0.5)

S=(−1.75,0.5)

S=(−1.5,0.5)

S=(−1.25,0.5)

S=(−1,0.5)

S=(−0.75,0.5)

S=(−0.5,0.5)

S=(−0.25,0.5)

S=(0,0.5)

S=(0.25,0.5)

S=(0.5,0.5)

S=(0.75,0.5)

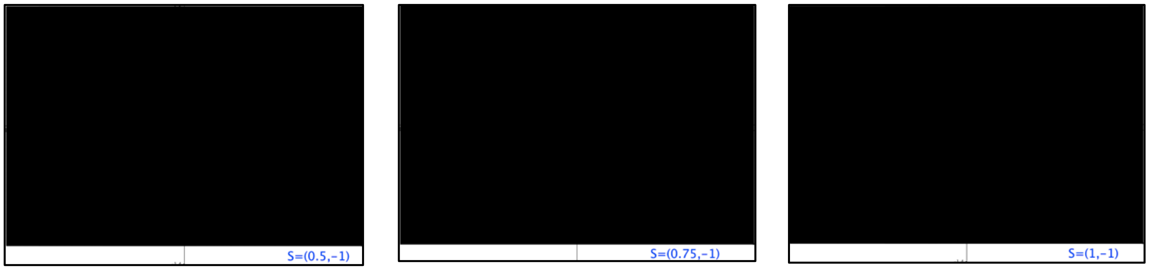
S=(1,0.5)

S=(−2,0.25)

S=(−1.75,0.25)

S=(−1.5,0.25)


S=(-1.25,0.25)
S=(-1,0.25)
S=(-0.75,0.25)
S=(-0.5,0.25)
S=(-0.25,0.25)
S=(0,0.25)
S=(0.25,0.25)
S=(0.5,0.25)
S=(0.75,0.25)
S=(1,0.25)
S=(-2,0)
S=(-1.75,0)
S=(-1.5,0)
S=(-1.25,0)
S=(-1,0)
S=(-0.75,0)
S=(-0.5,0)
S=(-0.25,0)


S=(0,0)
S=(0.25,0)
S=(0.5,0)
S=(0.75,0)
S=(1,0)
S=(-2,-0.25)
S=(-1.75,-0.25)
S=(-1.5,-0.25)
S=(-1.25,-0.25)
S=(-1,-0.25)
S=(-0.75,-0.25)
S=(-0.5,-0.25)
S=(-0.25,-0.25)
S=(0,-0.25)
S=(0.25,-0.25)
S=(0.5,-0.25)
S=(0.75,-0.25)
S=(1,-0.25)

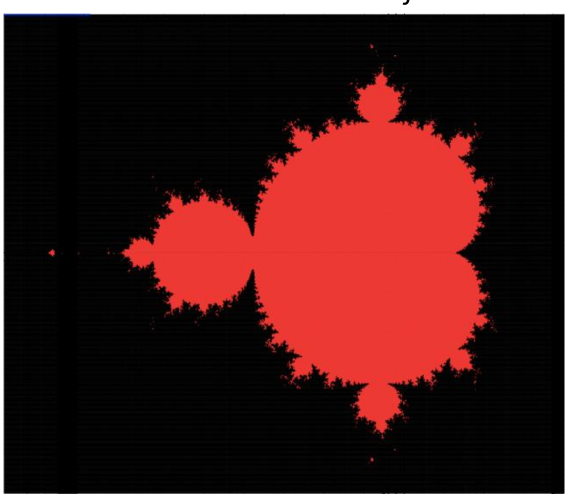

S=(-2,-0.5)
S=(-1.75,-0.5)
S=(-1.5,-0.5)
S=(-1.25,-0.5)
S=(-1,-0.5)
S=(-0.75,-0.5)
S=(-0.5,-0.5)
S=(-0.25,-0.5)
S=(0,-0.5)
S=(0.25,-0.5)
S=(0.5,-0.5)
S=(0.75,-0.5)
S=(1,-0.5)
S=(-2,-0.75)
S=(-1.75,-0.75)
S=(-1.5,-0.75)
S=(-1.25,-0.75)
S=(-1,-0.75)


S=(-0.75,-0.75)

S=(-0.5,-0.75)

S=(-0.25,-0.75)

S=(0,-0.75)

S=(0.25,-0.75)

S=(0.5,-0.75)

S=(0.75,-0.75)

S=(1,-0.75)

S=(-2,-1)

S=(-1.75,-1)

S=(-1.5,-1)

S=(-1.25,-1)

S=(-1,-1)

S=(-0.75,-1)

S=(-0.5,-1)

S=(-0.25,-1)

S=(0,-1)

S=(0.25,-1)



El modo de pintar se puede modificar, para que el color rojo tenga varias tonalidades según la velocidad de convergencia en cada iteración. Solo basta con modificar en opciones avanzado el número uno (1) y reemplazarlo con el número e (Ilustración 49), esto permite que el resultado de la operación vaya cambiando el número de tonalidad del color rojo que GeoGebra tiene incorporado. Esto tiene un efecto visual poderoso, como se observa en la siguiente ilustración, se puede comparar las dos formas de impresión.

Una sola tonalidad rojo



Miles de tonalidades de rojo

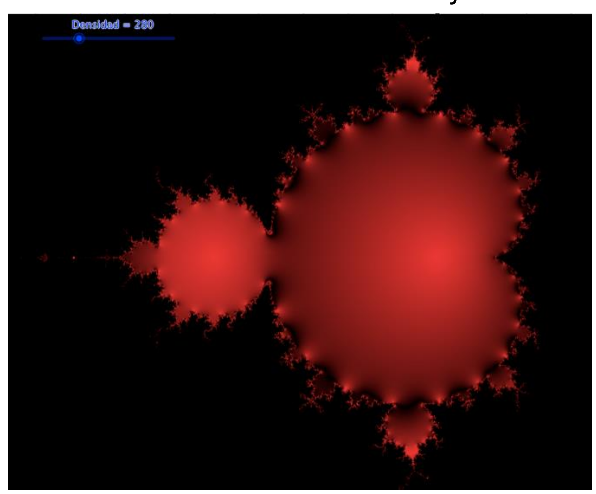


Ilustración 55: *Tonalidades de rojo Conjunto de Mandelbrot.*
Fuente*: Elaboración propia.*